

INSTYTUT SYSTEMÓW INŻYNIERII ELEKTRYCZNEJ

LABORATORIUM PODSTAW ELEKTROTECHNIKI I ELEKTRONIKI

Ćwiczenie 1.

Podstawowe prawa obwodów prądu stałego

Grupa nr:.....

Zespół nr:.....

Skład zespołu:

1.....

2.....

3.....

4.....

5.....

Data wykonania ćwiczenia:.....

Data oddania sprawozdania:.....

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Wiadomości elementarne

Prąd elektryczny to zjawisko fizyczne polegające na uporządkowanym ruchu ładunków elektrycznych wywołanym działaniem pola elektrycznego. Kierunkiem prądu jest kierunek ruchu ładunków dodatnich, tzn. od punktu o wyższym do punktu o niższym potencjale. Określenia prąd elektryczny używa się także jako skrótu terminu **natężenie prądu elektrycznego**, który oznacza granicę stosunku ładunku elektrycznego Δq przepływającego w ciągu pewnego czasu Δt przez poprzeczny przekrój przestrzeni do rozpatrywanego czasu, gdy czas dąży do zera

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Jednostka prądu to amper - 1A

Napięcie jest wielkością skalarną charakteryzującą potencjalne pole elektryczne i wyraża się stosunkiem pracy potrzebnej do przesunięcia dodatniego ładunku z punktu B do A, do wartości tego ładunku. Jednostka napięcia to wolt – 1V. Napięcie między punktami A oraz B jest różnicą potencjałów tych punktów. Napięcie oznaczamy literą **u** oraz strzałką z grotem skierowanym do punktu o wyższym potencjale, tzn. punktu, którego potencjał występuje we wzorze określającym napięcie między punktami A i B jako odjemna.

$$u_{AB} = V_A - V_B$$

Obwód elektryczny to połączenie elementów elektrycznych umożliwiające przepływ prądu elektrycznego.

Schemat obwodu to jego graficzne odwzorowanie. Schemat zawiera informacje o elementach tworzących obwód przedstawionych za pomocą symboli oraz o sposobie ich połączenia.

Elementy obwodu elektrycznego są połączone przewodami. Najczęściej zakłada się, że są one idealnie przewodzące. Oznacza to, że przy przepływie prądu elektrycznego napięcie między końcami przewodu jest zawsze równe 0.

Gałąź obwodu elektrycznego to jego część posiadająca dwa końce określane jako węzły. Jest ona związana z elementem obwodu.

Węzeł obwodu to punkt połączenia dwóch lub większej liczby gałęzi.

Celem analizy obwodu elektrycznego jest zwykle wyznaczenie prądów płynących w gałęziach obwodu oraz napięć pomiędzy jego węzłami

Strzałki umieszczane na schematach związane z prądami i napięciami wyznaczają **kierunki odniesienia** tych wielkości. Rzeczywiste kierunki to te, które wynikają z uwzględnienia kierunku strzałki (kierunku odniesienia) oraz wartości liczbowej związanej z tym kierunkiem.

Ustalono, że kierunkiem przepływu prądu elektrycznego jest kierunek ruchu ładunków dodatnich, tzn. od punktu o wyższym do punktu o niższym potencjale. Strzałka napięcia wskazuje punkt o wyższym potencjale. Jeżeli napięcie i prąd pewnego elementu (gałęzi) mają mieć jednocześnie wartości dodatnie lub jednocześnie ujemne to kierunki odniesienia prądu i napięcia muszą być przeciwne (jak na rysunku poniżej). Kierunki takie określa się jako **stowarzyszone kierunki odniesienia napięcia i prądu**.

1.2. Elementy obwodów elektrycznych

Element obwodu elektrycznego to jego część niepodzielna pod względem funkcjonalnym na danym poziomie dokładności rozważań.

Z elementami obwodu są związane trzy rodzaje procesów energetycznych:

- wytwarzanie energii elektrycznej,
- akumulacja energii,
- rozpraszanie energii.

W schematach obwodu umieszczane są zwykle **elementy idealne**, tzn. takie, które są związane wyłącznie z jednym rodzajem procesu energetycznego.

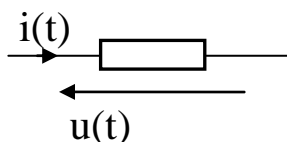
Rozpatrywane będą obwody o parametrach skupionych. Ich wymiary są znacznie mniejsze od długości fali elektromagnetycznej. Mogą być przedstawione za pomocą elementów skupiających przypisane im właściwości w określonych punktach przestrzeni. Elementy są połączone bezoporowymi przewodami.

Klasyfikacja elementów w zależności od liczby końcówek

- elementy dwukońcówkowe, dwójniki
- elementy wielokońcówkowe, wśród których bardzo ważne to trójniki (elementy o trzech końcówkach) oraz czwórniki (elementy o dwóch parach końcówek).

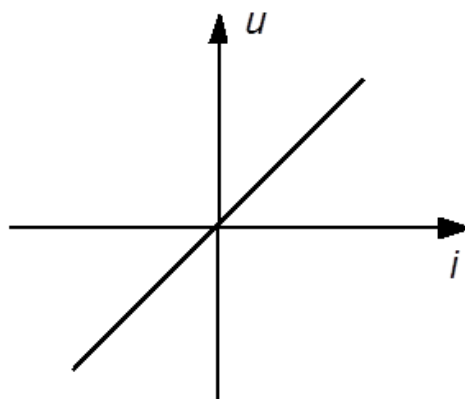
Rozpatrywane będą obwody stacjonarne. Elementy takiego obwodu i jego sposób połączeń nie są funkcją czasu.

Idealny opornik jest elementem, którego jedyną własnością jest rozpraszanie pobieranej z obwodu energii.



Rys.1. Symbol opornika liniowego

Opornik liniowy to taki, którego charakterystyka napięciowo-prądowa (wykres zależności napięcia w funkcji prądu) jest linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.



Rys.2. Charakterystyka napięciowo-prądowa opornika liniowego

Dla opornika liniowego obowiązuje **prawo Ohma**:

$$u = Ri$$

gdzie: R - rezystancja (opór elektryczny). Jednostką rezystancji jest om:

$$1\Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

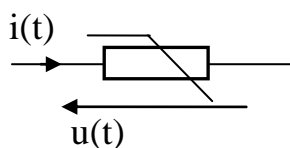
Inna postać prawa Ohma to:

$$i = Gu$$

gdzie: G – konduktancja (przewodność). Jednostką konduktancji jest simens:

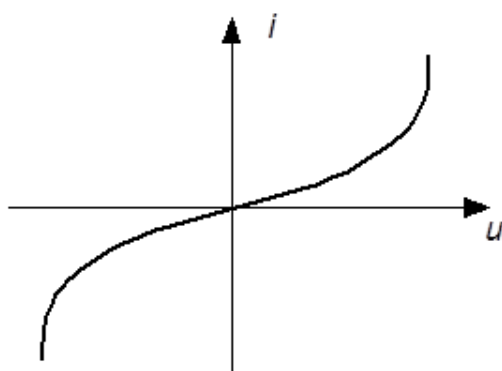
$$1\text{S} = 1 \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

Oprócz oporników liniowych są też **oporniki nieliniowe**.



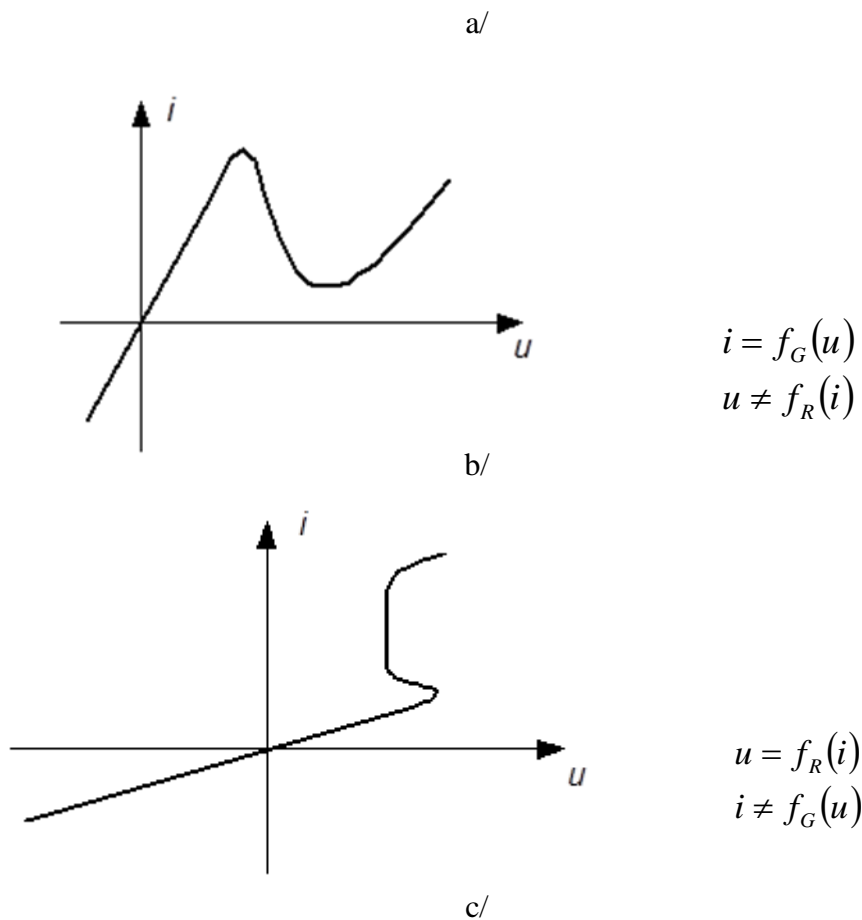
Rys.3. Symbol opornika nieliniowego

Charakterystyki oporników nieliniowych mają charakter nieliniowy. Przykłady charakterystyk nieliniowych rezystancji przedstawione są poniżej.



$$i = f(u)$$

$$u = f^{-1}(i)$$



Rys.4. Charakterystyki oporników nieliniowych: a – opornik niezależny, b - opornik uzależniony napięciowo, c - opornik uzależniony prądowo

Idealne źródło napięcia jest takim elementem, na zaciskach którego panuje napięcie niezależne od płynącego przez źródło prądu (może być tylko funkcją czasu).



Rys.5. Symbol i charakterystyka idealnego źródła napięcia

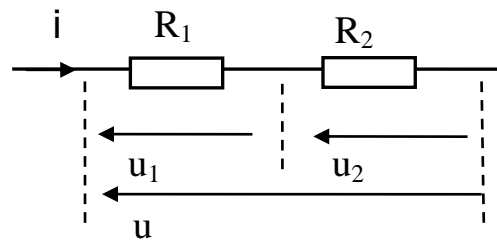
Idealne źródło prądu jest takim elementem, przez który płynie prąd niezależny od napięcia panującego na zaciskach źródła (może być tylko funkcją czasu).



Rys.6. Symbol i charakterystyka idealnego źródła prądu

1.3. Proste połączenia rezystorów

Połączenie szeregowe to takie, w którym przez połączone elementy płynie ten sam prąd.



Rys.7. Szeregowe połączenie oporników

Rezystancja zastępcza połączonych szeregowo rezystorów jest równa sumie rezystancji tych rezystorów:

$$R_z = R_1 + R_2 \quad \text{dla dwóch oporników połączonych szeregowo}$$

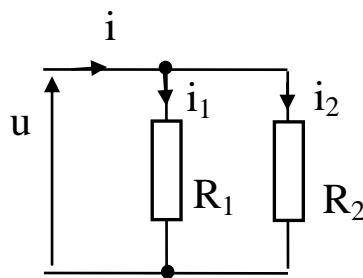
$$R_z = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad \text{dla wielu oporników połączonych szeregowo}$$

Połączenie szeregowe jest dzielnikiem napięcia dołączonego do zacisków zewnętrznych połączenia. Napięcie przyłożone do zacisków połączenia szeregowego ulega podziałowi na napięcia połączonych szeregowo elementów wprost proporcjonalnie do ich rezystancji.

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Połączenie równoległe to takie, w którym na połączonych elementach panuje to samo napięcie.



Rys.8. Równoległe połączenie oporników

Konduktancja zastępcza połączonych równoległe rezystorów jest równa sumie konduktancji tych rezystorów:

$$G_z = G_1 + G_2 \quad \text{lub} \quad R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{dla dwóch oporników}$$

$$G_z = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad \text{dla wielu oporników}$$

Połączenie równoległe jest dzielnikiem prądu dopływającego do zacisków zewnętrznych połączenia. Prąd dopływający do połączenia równoległego ulega podziałowi na prądy płynące przez elementy połączone równoległe wprost proporcjonalnie do ich przewodności (odwrotnie proporcjonalnie do ich rezystancji).

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \quad i_2 = \frac{u}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}$$

1.4. Prawa Kirchhoffa

Prądowe prawo Kirchhoffa

Najbardziej znana postać prądowego prawa Kirchhoffa (PPK) to:

W dowolnym obwodzie elektrycznym, dla dowolnego węzła tego obwodu, w dowolnej chwili czasu algebraiczna suma wszystkich prądów dopływających do węzła jest równa zero.

$$\sum_{\alpha} i_{\alpha}(t) = 0 \quad \text{sumowanie dotyczy wszystkich gałęzi łączących się z rozważanym węzłem}$$

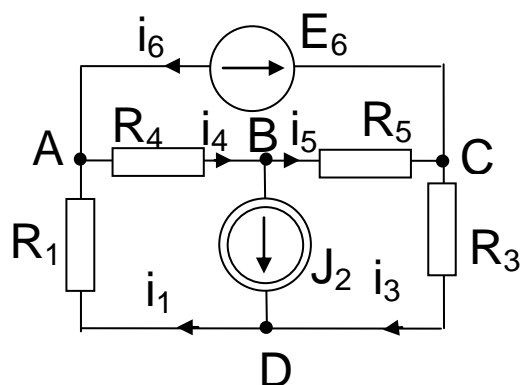
Określenie suma algebraiczna oznacza, że prądy posiadające różne zwroty względem węzła mają w tej sumie różne znaki. W dalszej części rozważań prądom odpływającym będzie przypisywany znak: „+” a prądom dopływającym znak: „-”.

Dla analizy obwodów elektrycznych istotne jest twierdzenie związane z przytoczonymi wcześniej pojęciami topologicznymi.

Twierdzenie

Maksymalna liczba równań liniowo niezależnych otrzymanych na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa w obwodzie o n węzłach wynosi $(n-1)$. Równania te mogą być sformułowane przez zastosowanie PPK do $(n-1)$ węzłów obwodu (wszystkich węzłów obwodu z wyjątkiem jednego, dowolnie wybranego).

Równania te rozważane samodzielnie nie pozwalają na wyznaczenie prądów w obwodzie gdyż ich liczba jest mniejsza niż liczba gałęzi i nie zawierają one informacji o elementach występujących w obwodzie.



$$A. \quad -i_1 + i_4 - i_6 = 0$$

$$B. \quad J_2 - i_4 + i_5 = 0$$

$$C. \quad i_3 - i_5 + i_6 = 0$$

$$D. \quad i_1 - J_2 - i_3 = 0$$

Rys. 9. Przykładowy obwód oraz równania dla wszystkich węzłów tego obwodu; układ niezależny tworzą trzy dowolnie wybrane spośród przedstawionych czterech

Napięciowe prawo Kirchhoffa

Najbardziej znana postać napięciowego prawa Kirchhoffa (NPK) to:

W dowolnym obwodzie elektrycznym, dla dowolnej pętli tego obwodu, w dowolnej chwili czasu algebraiczna suma napięć wszystkich elementów znajdujących się w gałęziach tej pętli jest równa zero.

$$\sum_{\beta} u_{\beta}(t) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{sumowanie dotyczy wszystkich elementów znajdujących się w gałęziach} \\ \text{tworzących pętlę} \end{array}$$

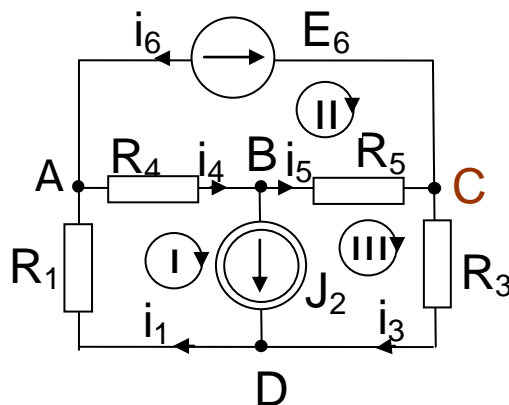
Określenie suma algebraiczna oznacza, że napięcia posiadające różne zwroty względem przyjętego kierunku obiegu pętli mają w tej sumie różne znaki. W dalszej części rozważań napięciom o kierunkach zgodnych z przyjętym kierunkiem obiegu pętli będzie przypisywany znak: „+”, o kierunku przeciwnym znak: „-”.

Dwa problemy powstające przy analizie obwodu to: jaka jest maksymalna liczba równań sformułowanych na podstawie NPK tworzących niezależny układ i w jaki sposób należy je formułować. Dla analizy obwodów elektrycznych istotne jest twierdzenie zawierające rozwiązanie dwóch przedstawionych problemów:

Twierdzenie

Maksymalna liczba równań liniowo niezależnych otrzymanych na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa w obwodzie o b gałęziach i n węzłach wynosi $(b-n+1)$. Równania te mogą być sformułowane przez zastosowanie NPK do $(b-n+1)$ oczek obwodu (wszystkich oczek obwodu).

Równania te rozważane samodzielnie nie pozwalają na wyznaczenie prądów w obwodzie gdyż ich liczba jest mniejsza niż liczba gałęzi. Łącznie z równaniami sformułowanymi na podstawie PPK mogą tworzyć układ równań niezależnych. Liczba niewiadomych będzie równa liczbie równań po uzależnieniu napięć na elementach od płynących przez nie prądów.



Rys.10. Przykładowy obwód oraz równania dla wszystkich oczek tego obwodu; kierunki napięć występujących w obu układach równań są stowarzyszone z kierunkami prądów płynących przez elementy

Kompletny układ równań dla obwodu z rys.11 uzyskanych na podstawie PPK oraz NPK przedstawiony jest poniżej. W równaniach tych napięcia na opornikach zostały zastąpione zgoǳnie z prawem Ohma iloczynami wartości oporu i prądu opornika

$$B. \quad J_2 - i_4 + i_5 = 0$$

$$C. \quad i_3 - i_5 + i_6 = 0$$

$$D. \quad i_1 - J_2 - i_3 = 0$$

$$I. \quad -i_1 R_1 - i_4 R_4 - u_J = 0$$

$$II. \quad i_4 R_4 + E_6 + i_5 R_5 = 0$$

$$III. \quad -i_5 R_5 - i_3 R_3 + u_J = 0$$

1.5. Zasada superpozycji

Zasada superpozycji obowiązuje w układach liniowych.

Bardzo ogólne sformułowanie zasady superpozycji to:

Skutek pochodzący od wielu przyczyn jest sumą skutków pochodzących od każdej z tych przyczyn oddzielnie.

W liniowych obwodach elektrycznych skutkami są napięcia i prądy w obwodzie, wymuszeniami napięcia źródłowe **niezależnych** źródeł napięciowych oraz prądy źródłowe **niezależnych** źródeł prądowych. Każdy prąd oraz każde napięcie w obwodzie liniowym (wielkość obwodowa – WO) zawierającym k niezależnych źródeł napięciowych oraz m niezależnych źródeł prądowych jest liniowo zależne od tych wielkości a więc jest funkcją postaci:

$$WO = \sum_{r=1}^{r=k} a_r e_r + \sum_{s=1}^{s=m} b_s j_s$$

gdzie:

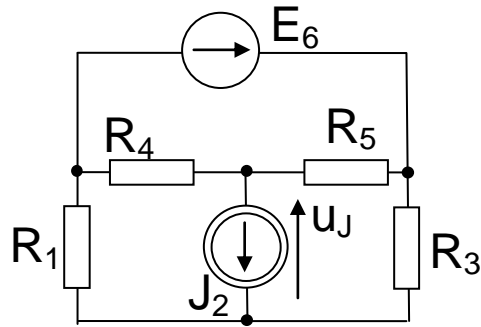
e_r, j_s - napięcia i prądy źródłowe

a_r, b_s - współczynniki zależne wyłącznie od wartości elementów obwodu z wyłączeniem źródeł niezależnych

Na mocy zasady superpozycji dowolne napięcie (prąd) w obwodzie liniowym może być obliczone jako algebraiczna suma wartości tego napięcia (prądu) w obwodach powstałych z obwodu analizowanego przez usunięcie części źródeł niezależnych. W analizowanych obwodach **każde z niezależnych źródeł musi być obecne dokładnie jeden raz**. Po usunięciu niezależnego źródła napięciowego jego zaciski zostają zwarte, następstwem usunięcia niezależnego źródła prądowego z obwodu jest pozostawienie jego zacisków rozwartych.

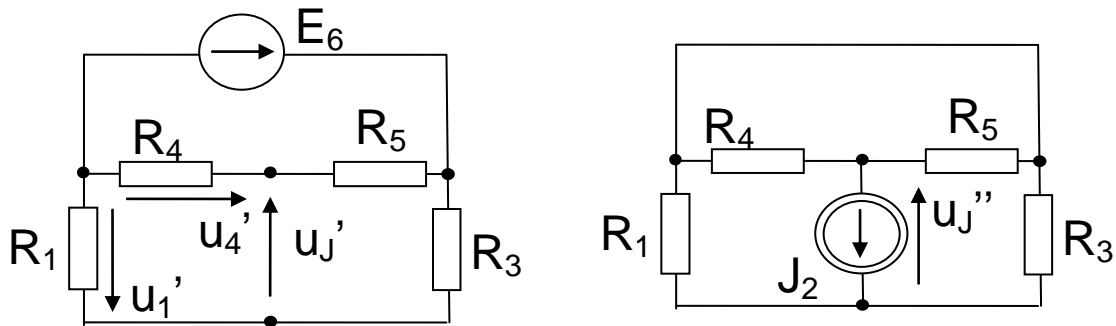
Szczególnym przypadkiem jest analiza tylu obwodów powstałych z obwodu wyjściowego ile zawiera on źródeł niezależnych. Każdy z tych obwodów zawiera dokładnie jedno wymuszenie (źródło niezależne), każdy inne.

Przykład zastosowania zasady superpozycji do analizy obwodu



Rys.11. Analizowany obwód

Przykładem wykorzystania zasady superpozycji do przeprowadzenia analizy obwodu jest obliczenie napięcia na źródle prądowym w przedstawionym wyżej obwodzie. Zasada superpozycji prowadzi do analizy przedstawionych poniżej dwóch obwodów:

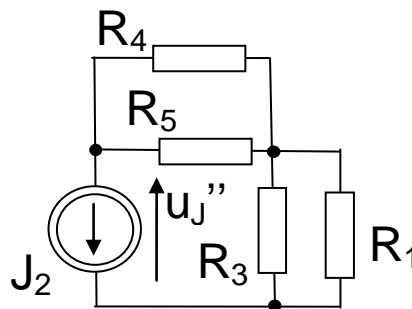


Rys.12. Obwody analizowane po zastosowaniu zasady superpozycji

Analiza obwodu ze źródłem napięciowym prowadzi do następujących wyników:

$$u'_4 = E_6 \frac{R_4}{R_4 + R_5}; \quad u'_1 = E_6 \frac{R_1}{R_1 + R_3}; \quad u'_J = u'_4 - u'_1 = E_6 \left(\frac{R_4}{R_4 + R_5} + \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right)$$

Obwód ze źródłem prądowym można przedstawić w postaci pokazanej na rys.13.



Rys.13. Obwód ze źródłem prądowym

Analiza obwodu z rys.13 prowadzi do następującego wyniku:

$$u''_J = -J_2 \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)$$

Podsumowanie wyników otrzymanych dla obu obwodów przedstawione jest poniżej

$$u_J = u'_J + u''_J = E_6 \left(\frac{R_4}{R_4 + R_5} + \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right) - J_2 \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \right)$$

2. Pomiary oraz opracowanie wyników

2.1. Weryfikacja praw Kirchhoffa oraz prawa Ohma

W tym punkcie zostaną zweryfikowane doświadczalnie prądowe i napięciowe prawo Kirchhoffa oraz prawo Ohma. Układ pomiarowy należy połączyć zgodnie ze schematem przedstawionym na rys.14. Jako źródła napięciowe E_1 oraz E_2 zostaną użyte zasilacze napięcia stałego. Ustawione napięcia wyjściowe zasilaczy mają odpowiadać wartościom określonym w tabeli obok zamieszczonego schematu pomiarowego. Do wykonania pomiarów napięć i prądów należy użyć miernika uniwersalnego, którego tryb pracy będzie odpowiadał wykonywanemu pomiarowi określonej wielkości. Wyniki pomiarów należy zapisać w tabeli a następnie wykonać obliczenia wybranych wielkości obwodowych na podstawie pomiarów innych oraz praw Kirchhoffa oraz prawa Ohma.

$$E_1 = 10V$$

$$E_2 = 6V$$

$$R_1 = 2k\Omega$$

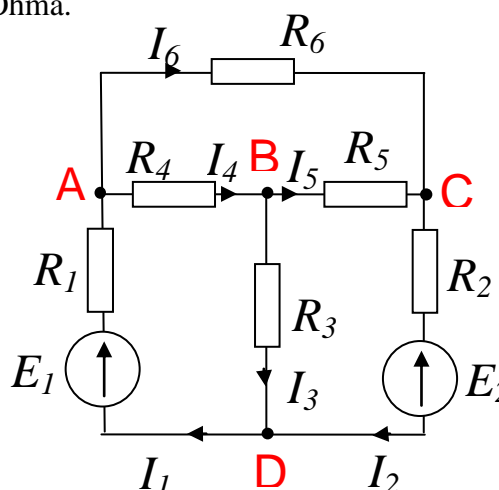
$$R_2 = 3k\Omega$$

$$R_3 = 1k\Omega$$

$$R_4 = 1k\Omega$$

$$R_5 = 1k\Omega$$

$$R_6 = 1k\Omega$$



Rys.14. Schemat badanego obwodu

Tabela 1.

Wielkość obwodowa i jej jednostka	I_1	I_2	U_{AB}	U_{CB}	U_{BD}	U_{AC}	R_1	R_2	R_3
	mA	mA	V	V	V	V	k Ω	k Ω	k Ω
Wartość zmierzona									
Wartość obliczona									

- Zmierz prądy gałęziowe określone w pierwszym wierszu tabeli 1. Wyniki pomiarów zapisz w tabeli.

- Zmierz napięcia określone w pierwszym wierszu tabeli 1. Wyniki pomiarów zapisz w tabeli.
- Wyłącz napięcia zasilające obwód i rozłącz go.
- Zmierz rezystancje wymienione w pierwszym wierszu tabeli 1. Wyniki pomiarów zapisz w tabeli.
- Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa (NPK) dla pętli ABD oblicz napięcie U_{AD} , następnie napięcie na oporniku R_1 (wykorzystując znaną wartość E_1) i korzystając z prawa Ohma prąd I_1 . Wynik wpisz do tabeli 1.
- Na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa (PPK) dla węzła D wyznacz prąd I_3 . Następnie wykorzystując prawo Ohma oraz pomierzoną wartość R_3 wyznacz napięcie U_{BD} . Wynik wpisz do tabeli 1.
- Na podstawie NPK dla pętli ACB wyznacz napięcie U_{AC} . Wynik zapisz w tabeli 1.
- Na podstawie NPK dla pętli BCD wyznacz napięcie U_{AC} a następnie korzystając ze znanej wartości E_2 napięcie na oporniku R_2 . Otrzymany wynik i pomierzona wartość I_2 pozwalają na wyznaczenie obliczeniowe R_2 . Wartość tę wpisz do tabeli 1.
- Porównaj wartości pomierzone z obliczonymi. Uzasadnij różnice.
-

2.2. Doświadczalne potwierdzenie zasady superpozycji

Układ pomiarowy należy połączyć zgodnie ze schematem przedstawionym na rys.14. Jako źródła napięciowe E_1 oraz E_2 zostaną użyte zasilacze napięcia stałego. Ustawione napięcia wyjściowe zasilaczy mają odpowiadać wartościom określonym w tabeli obok zamieszczonego schematu pomiarowego. Do wykonania pomiarów napięć i prądów należy użyć miernika uniwersalnego, którego tryb pracy będzie odpowiadał wykonywanemu pomiarowi określonej wielkości. Wyniki pomiarów należy zapisać w tabeli a następnie wykonać obliczenia wybranych wielkości obwodowych na podstawie pomiarów

- Zmierz prądy gałęziowe oraz napięcie określone przez prowadzącego przy działającym źródle E_1 (źródło E_2 zostaje usunięte z obwodu). Wyniki pomiarów zapisz w tabeli 2.
- Zmierz prądy gałęziowe oraz napięcie mierzone w poprzednim punkcie przy działającym źródle E_2 (źródło E_1 zostaje usunięte z obwodu). Wyniki pomiarów zapisz w tabeli 2.
- /Zmierz prądy gałęziowe oraz napięcie mierzone w poprzednich punktach przy działających jednocześnie źródłach: E_1 oraz E_2 . Wyniki pomiarów zapisz w tabeli 2.

- Oblicz sumy prądów oraz napięć zmierzonych przy działających oddzielnie źródłach E_1 oraz E_2 . Wyniki obliczeń wpisz do tabeli 2.
- Porównaj wartości prądów oraz napięć otrzymane przez pomiar w obwodzie przy działających jednocześnie źródłach: E_1 oraz E_2 z wartościami otrzymanymi jako sumy prądów i napięć otrzymanych z pomiarów przy działających oddzielnie źródłach: E_1 oraz E_2 .

Tabela 2.

Prądy → gałęziowe	I	I	U	U
Działające źródła ↓	mA	mA	V	V
E_1				
E_2				
Suma obu pomiarów				
E_1 oraz E_2				

Sprawozdanie

W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. protokół zawierający wyniki uzyskane w trakcie zajęć,
2. analizę badanego układu metodą superpozycji wraz z porównaniem wyników obliczeniowych i pomiarowych,

3. Pytania kontrolne

- Podaj treść prądowego prawa Kirchhoffa. Ile niezależnych równań można sformułować dla obwodu wykorzystując PPK.
- Podaj treść napięciowego prawa Kirchhoffa. Ile niezależnych równań można sformułować dla obwodu wykorzystując NPK.
- Uzasadnij możliwość sformułowania na podstawie praw Kirchhoffa opisu obwodu, którego rozwiązanie pozwala na rozwiązanie zagadnienia analizy tego obwodu (liczba równań jest równa liczbie niewiadomych).
- Czy prawa Kirchhoffa obowiązują również w obwodach nieliniowych?
- Podaj treść prawa Ohma. Czy obowiązuje ono dla elementów nieliniowych?
- Jak zdefiniować pojęcie rezystancji elementu?

- W jakich obwodach obowiązuje zasada superpozycji?
- Podaj treść zasady superpozycji.

Literatura

- [1] **Tadeusiewicz M.**, Teoria Obwodów. Część I. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej. Łódź 2003.
- [2] **Osiowski J., Szabatin J.**, Podstawy Teorii Obwodów, t.I, WNT, Warszawa 1992.
- [3] **Osowski S., Siwek K., Śmiałek M.**, Teoria Obwodów – podręcznik multimedialny, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006.