Michał Tadeusiewicz

Sygnały i systemy dynamiczne
Część I

Zadanie nr 32 - Dostosowanie kierunku Automatyka i Robotyka do prowadzenia studiów niestacjonarnych (z wykorzystaniem e-learningu)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Prezentacja multimedialna
współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
w projekcie

„Innowacyjna dydaktyka bez ograniczeń – zintegrowany rozwój Politechniki Łódzkiej – zarządzanie Uczelnią, nowoczesna oferta edukacyjna i wzmacniania zdolności do zatrudniania osób niepełnosprawnych”

Politechnika Łódzka
Instytut Automatyki

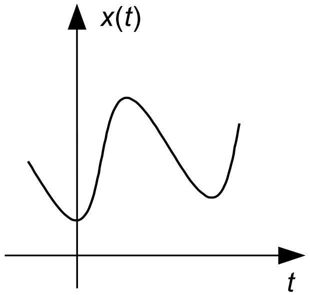
90-924 Łódź, ul. Żeromskiego 116,
tel. 042 631 28 83
www.kapitalludzki.p.lodz.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

1. Opis i właściwości sygnałów i systemów

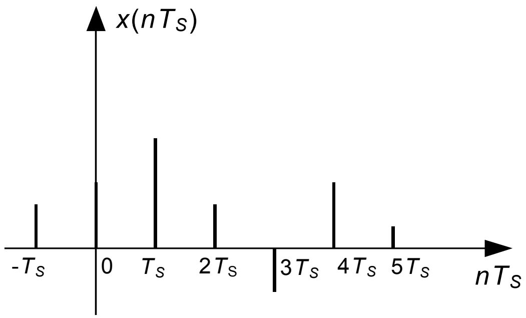
1.1. Opis i właściwości sygnałów

Sygnał czasu ciągłego



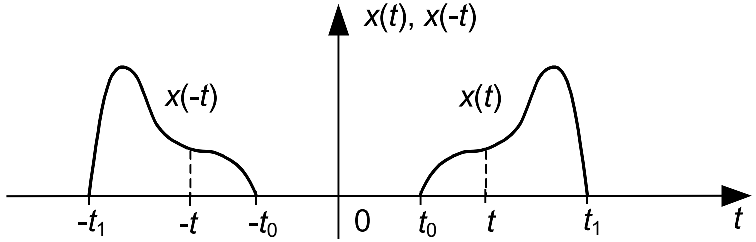
Rys. 1.1a

Sygnał czasu dyskretnego



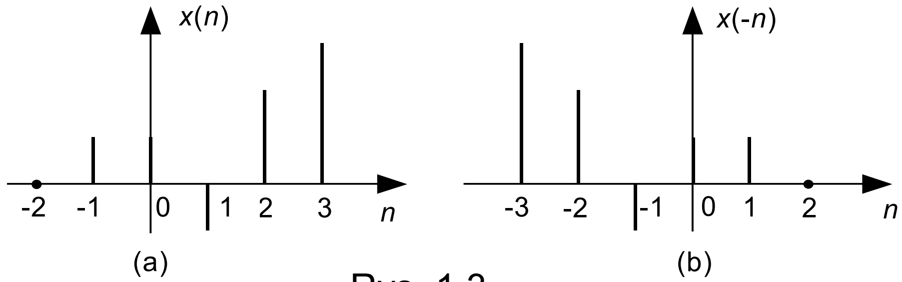
Rys. 1.1b

Refleks sygnału czasu ciągłego



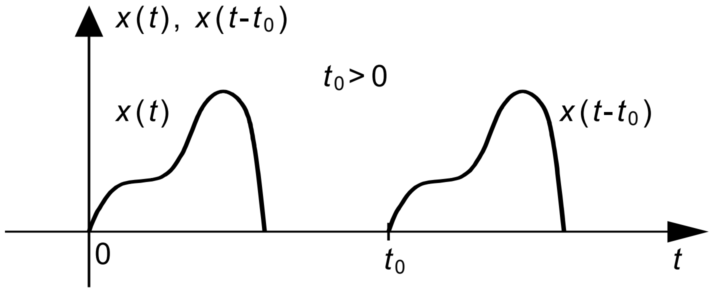
Rys. 1.2

Refleks sygnału czasu dyskretnego



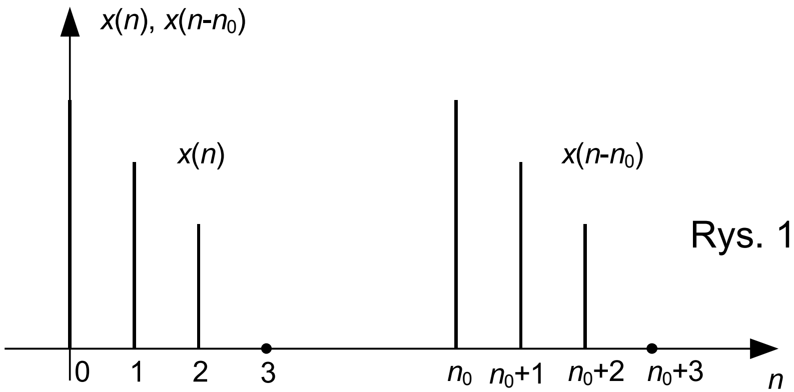
Rys. 1.3

Przesunięcie sygnału czasu ciągłego



Rys. 1.4

Przesunięcie sygnału czasu dyskretnego

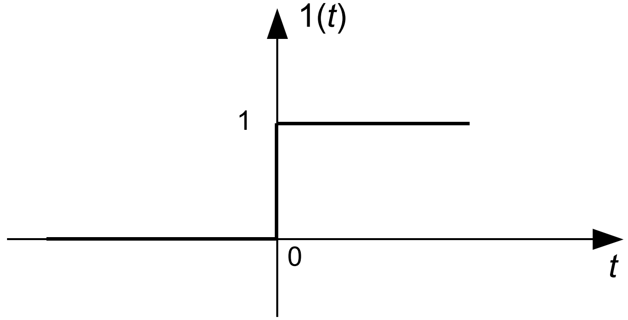


Rys. 1.5

Funkcja jednostkowa

Definicja

$$1(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t < 0$$
$$1(t) = 1 \quad \text{dla} \quad t > 0 \tag{1.1}$$

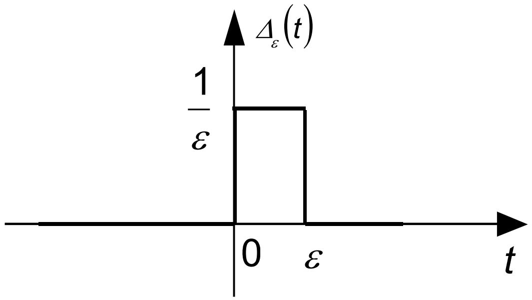


Rys. 1.6

$t = 0$ jest punktem nieciągłości funkcji jednostkowej

Implus Diraca

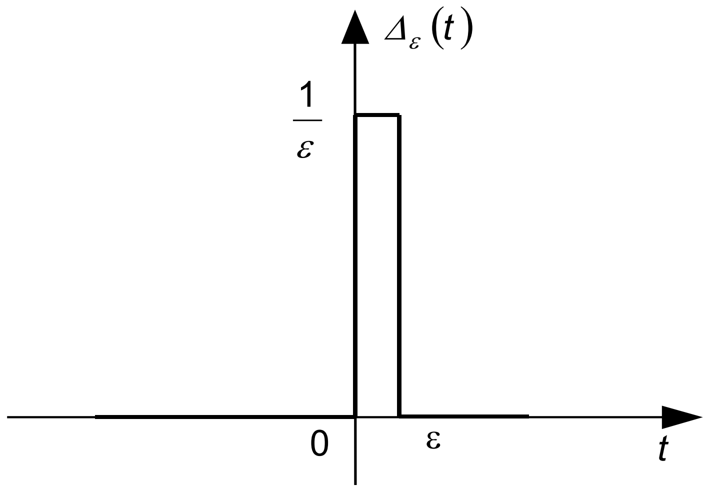
Funkcja pomocnicza



Rys. 1.7

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_\varepsilon(t)\mathrm{d}t = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1 \qquad (1.2)$$

Funkcja pomocnicza dla mniejszego ε



Rys. 1.8

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja impulsu Diraca

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta_\varepsilon(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\int_{-a}^{a} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \qquad a > 0 \tag{1.4}$$

Całkowanie funkcji pomnożonej przez przesunięty impuls Diraca

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

Zależności pomocnicze

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \tag{1.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\mathrm{d}t = 1. \tag{1.7}$$

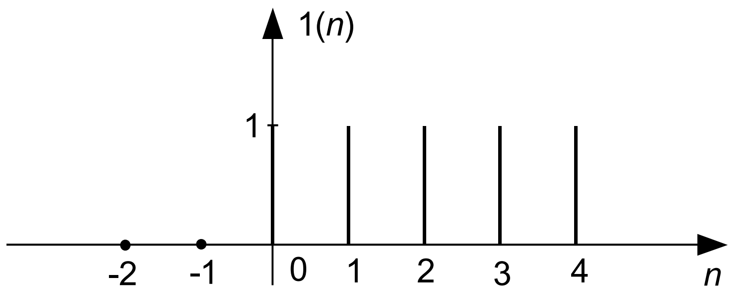
Stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1.8}$$

Dyskretna funkcja jednostkowa

Definicja

$$\begin{aligned} 1(n) &= 0 \qquad \text{dla} \qquad n < 0 \\ 1(n) &= 1 \qquad \text{dla} \qquad n \geq 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$



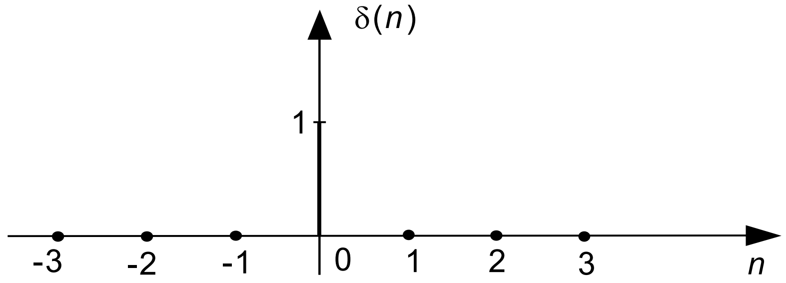
Rys. 1.9

Politechnika Łódzka
Instytut Automatyki

Próbka jednostkowa (impuls jednostkowy)

Definicja

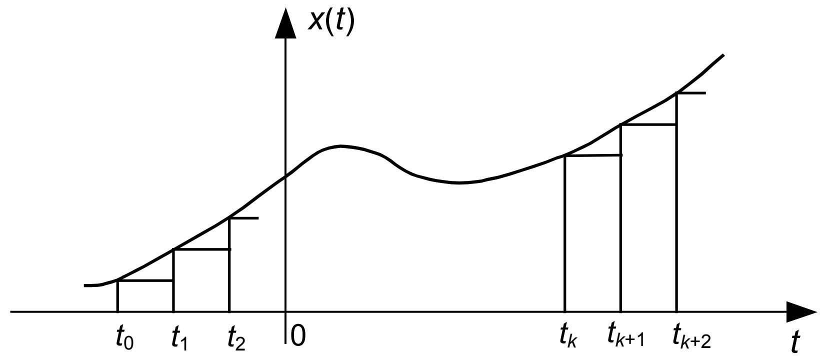
$$\begin{aligned} \delta(n) &= 0 \quad \text{dla} \quad n \neq 0 \\ \delta(n) &= 1 \quad \text{dla} \quad n = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$



Rys. 1.10

Reprezentacja sygnału czasu ciągłego

Przykładowy sygnał czasu ciągłego $x(t)$ aproksymowany funkcją schodkową

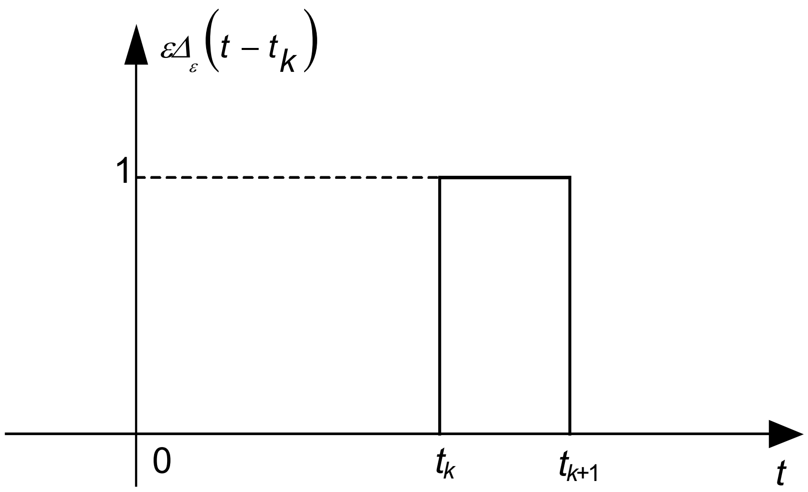


Rys. 1.11

$$\varepsilon = t_{k+1} - t_k \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Opis aproksymującego impulsu prostokątnego dla $t \in (t_k, t_{k+1})$

$$x(t_k)\varepsilon\Delta_\varepsilon(t-t_k)$$



Rys. 1.12

Opis aproksymowanego schodowo sygnału $x(t)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(t_k)\varepsilon\Delta_\varepsilon(t-t_k) \tag{1.13}$$

$\varepsilon \to 0$, $t_k \to \tau$, τ - zmienna ciągła, $\Delta_\varepsilon(t) \to \delta(t)$

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad t > t_0 \tag{1.14}$$

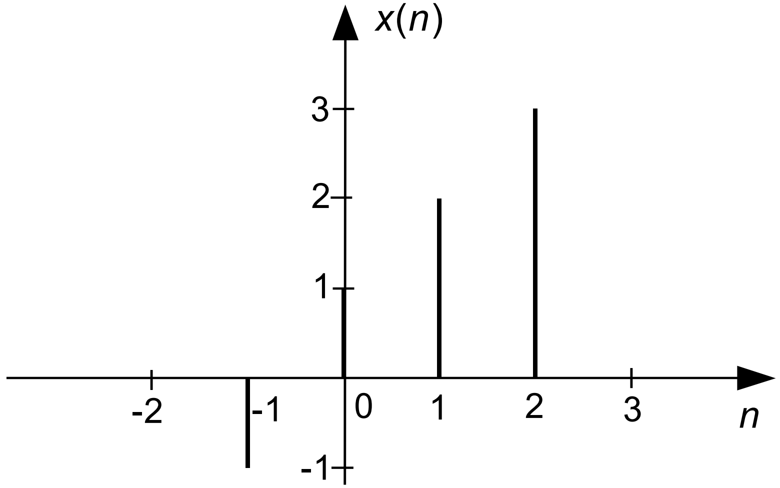
$$t_0 \to -\infty$$

Wzór splotowy określający sygnał czasu ciągłego

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.15}$$

Reprezentacja sygnału czasu dyskretnego

Przykład sygnału czasu dyskretnego



Rys. 1.13

Opis sygnału z rys. 1.13

$$x(n) = -\delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) \quad (1.16)$$

Opis równoważny

$$x(n) = x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + \\ + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) = \\ = \sum_{k=-1}^{2} x(k)\delta(n-k)$$

Wzór splotowy określający sygnał czasu dyskretnego

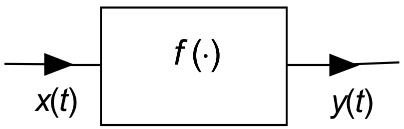
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.17)$$

1.2. Opis i właściwości systemów

Klasyfikacja systemów

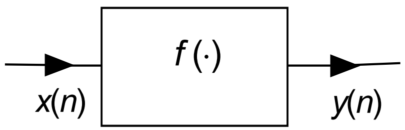
System określamy jako operację matematyczną przekształcającą sygnał wejściowy w sygnał wyjściowy

System czasu ciągłego



Rys. 1.14(a)

System czasu dyskretnego



Rys. 1.14(b)

Definicja

System czasu ciągłego jest liniowy, jeżeli zachodzi zależność

$$f\big(c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\big)=c_1f\big(x_1(t)\big)+c_2f\big(x_2(t)\big)$$

System czasu dyskretnego jest liniowy, jeżeli zachodzi zależność

$$f\big(c_1x_1(n)+c_2x_2(n)\big)=c_1f\big(x_1(n)\big)+c_2f\big(x_2(n)\big)$$

System czasu ciągłego, przekształcający sygnał wejściowy $x(t)$ w sygnał wyjściowy $y(t)$, jest stacjonarny, jeżeli jego odpowiedzią na sygnał $x(t-h)$ jest $y(t-h)$, dla każdego *t* i dowolnego *h*.

System czasu dyskretnego, przekształcający sygnał wejściowy $x(n)$ w sygnał wyjściowy $y(n)$, jest stacjonarny, jeżeli jego odpowiedzią na sygnał $x(n-N)$ jest $y(n-N)$, dla każdego (całkowitego) n i dowolnego (całkowitego) N.

Odpowiedź liniowego i stacjonarnego systemu czasu ciągłego

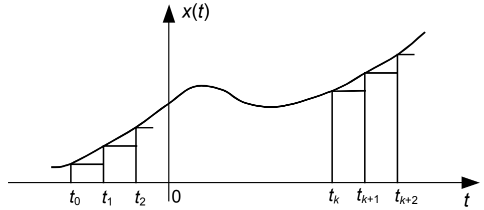
System pobudzany różnymi sygnałami wejściowymi

Rys. 1.15(a)

Rys. 1.15(b)

Rys. 1.15(c)

Opis aproksymowanego funkcją schodową sygnału z rys. 1.11



Rys. 1.11

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(t_k)\,\varepsilon\,\Delta_\varepsilon(t-t_k) \qquad (1.18)$$

Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odpowiedź systemu na sygnał wejściowy $\Delta_\varepsilon(t)$

$$\Delta_\varepsilon(t) \rightarrow h_\Delta(t)$$

Odpowiedź systemu na sygnał wejściowy opisany wzorem (1.18)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(t_k)\,\varepsilon\, h_\Delta(t - t_k) \qquad (1.19)$$

Przypadek graniczny $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \qquad \Delta_\varepsilon(t) \rightarrow \delta(t) \qquad h_\Delta(t) \rightarrow h(t)$$

Odpowiedź systemu na sygnał wejściowy $x(t)$ pokazany na rys. 1.11

$$y(t) = \int_{t_0}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (1.20)$$

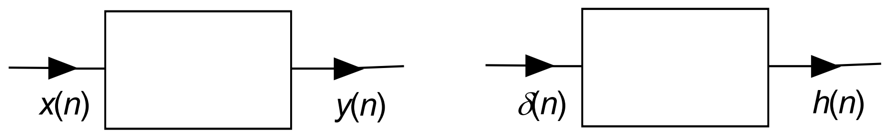
Odpowiedź systemu na dowolny sygnał wejściowy

$$x(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (1.21)$$

Odpowiedź liniowego i stacjonarnego systemu czasu dyskretnego

System pobudzany różnymi wymuszeniami



(a) (b)

Rys. 1.16

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

Reprezentacja splotowa dowolnego systemu wejściowego

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{1.22}$$

Odpowiedź systemu na różne pobudzenia

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

$$\delta(n-k) \rightarrow h(n-k)$$

$$x(k)\delta(n-k) \rightarrow x(k)h(n-k)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Odpowiedź systemu na dowolny sygnał wejściowy

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{1.23}$$

2. Transformacja Laplace'a

2.1. Zależności podstawowe

$f(t)$ - funkcja czasu ciągłego

Definicja

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad (2.1)$$

$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ - zmienna zespolona (pulsacja zespolona)

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

Warunek istnienia transformaty Laplace'a

Istnieją $M > 0$ i $c > 0$, takie, że

$$|f(t)| \le M\mathrm{e}^{ct} \quad \text{dla każdego} \quad t > 0$$

Przykład 2.1

$$f(t) = \mathrm{e}^{at}, \quad \text{a – liczba rzeczywista}$$

Transformata Laplace'a funkcji $f(t)$

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{s-a}\,\mathrm{e}^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty$$

Założenie $\sigma = \mathrm{Re}(s) > a$

$$\mathrm{e}^{-(s-a)t} = \mathrm{e}^{-(\sigma-a)t}\mathrm{e}^{-j\omega t} \to 0, \quad \text{gdy} \quad t \to \infty$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at}\right) = \frac{1}{s-a} \qquad (2.2)$$

Wzór (2.2) zachodzi również dla zespolonej liczby *a*

Przykład 2.2

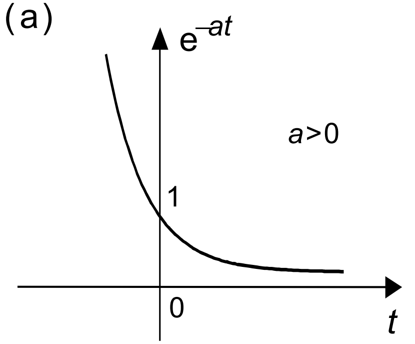
$1(t)$ - funkcja jednostkowa

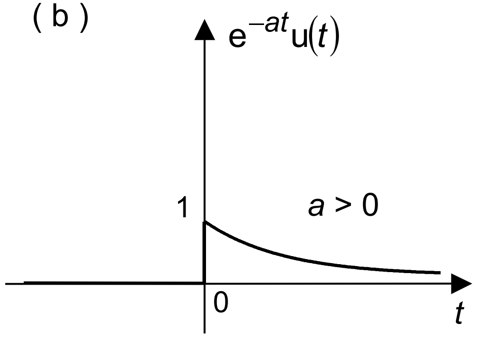
$$\mathcal{L}(1(t)) = \int_0^\infty 1(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

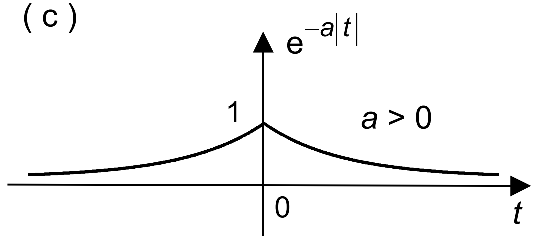
Założenie $\sigma = \mathrm{Re}(s) > a$, wówczas $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st} = 0$

$$\mathcal{L}(1(t)) = \frac{1}{s} \qquad (2.3)$$

Transformacja Laplace'a funkcji określonych dla $t \in (-\infty, \infty)$







Rys. 2.1

Wszystkie funkcje pokazane na rys. 2.1 mają jednakową transformatę Laplace'a

2.2. Podstawowe właściwości transformacji Laplace'a

Jednoznaczność

Z równości

$$\mathcal{L}(f_1(t)) = \mathcal{L}(f_2(t)) = F(s)$$

wynika

$$\int_0^\infty \left| f_1(t) - f_2(t) \right| \mathrm{d}t = 0$$

Funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mogą być różne tylko w punktach nieciągłości

Liniowość

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \qquad (2.4)$$

Dowód

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = \int_0^\infty (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t =$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t + c_2 \int_0^\infty f_2(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

Przykład 2.3

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s - \mathrm{j}\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + \mathrm{j}\omega} = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Podobnie otrzymujemy

$$\mathcal{L}(\sin\omega t)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{2.5}$$

Liniowość odwrotnej transformacji Laplace'a

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}(k_1F_1(s)+k_2F_2(s))=\\&=k_1\mathcal{L}^{-1}(F_1(s))+k_2\mathcal{L}^{-1}(F_2(s))\end{aligned} \tag{2.6}$$

Transformata pochodnej

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)=sF(s)-f(0) \tag{2.7}$$

Przykład 2.4

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)=\sin 2t+2\cos 2t \qquad x(0)=0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)+\mathcal{L}(x(t))=\mathcal{L}(\sin 2t)+2\mathcal{L}(\cos 2t)$$

$$sX(s)-x(0)+X(s)=\frac{2}{s^2+4}+2\frac{s}{s^2+4}$$

$$X(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{2(s+1)}{s^2+4}=\frac{2}{s^2+4}$$

$$x(t)=\sin 2t$$

Transformata całki

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\frac{1}{s}F(s) \tag{2.8}$$

Dowód

Oznaczamy $\quad g(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$

wówczas zachodzi

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = f(t) \quad \text{oraz} \quad g(0) = \int_0^0 f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

Na podstawie właściwości dotyczącej transformaty pochodnej:

$$F(s) = \mathcal{L}\left(\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right) = sG(s)$$

Stąd wynika

$$G(s) = \frac{1}{s}F(s)$$

Przykład 2.6

$$r(t) = \int_0^t 1(\tau)\mathrm{d}\tau = t \cdot 1(t)$$

$$\mathcal{L}(r(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(1(t)) = \frac{1}{s^2} \tag{2.9}$$

Przykład 2.7

$$\int_0^t \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = 1(t)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \delta(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{s}$$

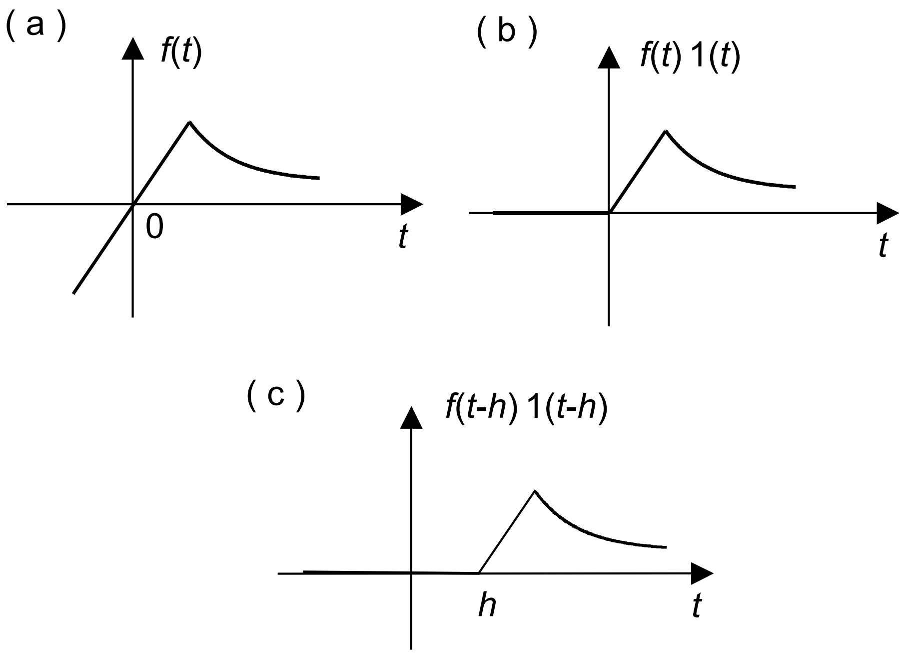
Korzystając z właściwości dotyczącej transformaty całki otrzymujemy

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}(\delta(\tau)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(\delta(\tau)) = 1 \tag{2.10}$$

Twierdzenie o przesunięciu

Rozpatrujemy funkcje $f(t)$, $f(t)1(\mathrm{t})$ oraz $f(t-h)1(\mathrm{t-h})$



Rys. 2.2

Zachodzi zależność

$$\mathcal{L}\left(f(t-h)1(t-h)\right)=\mathrm{e}^{-sh}F(s) \tag{2.11}$$

Dowód

$$\mathcal{L}\left(f(t-h)1(t-h)\right)=\int_0^\infty f(t-h)1(t-h)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Oznaczamy

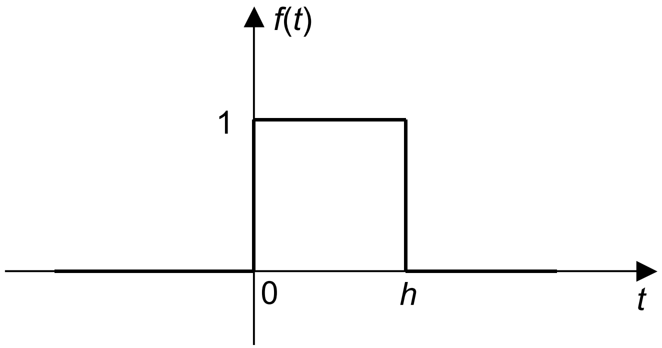
$$t-h=x$$

$$\mathcal{L}\left(f(t-h)1(t-h)\right)=\int_{-h}^\infty f(x)1(x)\mathrm{e}^{-s(x+h)}\mathrm{d}x=$$

$$=\mathrm{e}^{-sh}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-sh}F(s)$$

Przykład 2.8

Dany sygnał $f(t)$



Rys. 2.3

Wyrażamy $f(t)$ w zależności od funkcji jednostkowej

$$f(t) = 1(t) - 1(t-h)$$

$$F(s) = \mathscr{L}\left(1(t) - 1(t-h)\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sh} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sh}\right)$$

Twierdzenie o wartościach granicznych

$$x\left(0^{+}\right) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \tag{2.13}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) \tag{2.14}$$

2.3. Odwrotna transformata Laplace'a

$F(s)$ - funkcja wymierna o stopniu licznika mniejszym od stopnia mianownika

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{s=p_j}\left(F(s)e^{st}\right) \tag{2.15}$$

Biegun prosty (pojedynczy) funkcji $G(s)$

$$\operatorname*{res}_{s=p} G(s) = \lim_{s\to p}\left[(s-p)G(s)\right] \tag{2.16}$$

Biegun *l*-krotny funkcji $G(s)$

$$\operatorname*{res}_{s=p} G(s) = \lim_{s\to p}\left(\frac{1}{(l-1)!}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}s^{l-1}}F(s)(s-p)^l\right)$$

Przykład 2.9

$$F(s) = \frac{2s+1}{(s-2)^2(s+3)} \qquad (2.18)$$

$$f(t) = \sum_{j=1}^{2}\operatorname*{res}_{s=p_j}\left(F(s)e^{st}\right)$$

$$p_1 = 2 \quad (l=2) \qquad\qquad p_2 = -3 \quad (l=1)$$

$$\operatorname*{res}_{s=2}\left(F(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((s-2)^2\frac{2s+1}{(s-2)^2(s+3)}e^{st}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 2}\left(\frac{5}{(s+3)^2}e^{st} + \frac{2s+1}{s+3}t\,e^{st}\right) = \frac{1}{5}e^{2t} + te^{2t}$$

$$\operatorname*{res}_{s\to -3}\left(F(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to -3}\left((s+3)\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+3)}e^{st}\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}e^{-3t}$$

$$f(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + te^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

Rozkład na ułamki proste

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

Bieguny proste

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \alpha\frac{n(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_m)} \qquad (2.19)$$

Rozkład funkcji $F(s)$ na bieguny proste

$$F(s)=\sum_{l=1}^{m}\frac{k_l}{s-p_l} \tag{2.20}$$

Mnożymy obie strony równania (2.20) przez $(s-p_1)$

$$(s-p_1)F(s)=k_1+\sum_{l=2}^{m}\frac{k_l}{s-p_l}(s-p_1) \tag{2.21}$$

Stąd wynika

$$k_1=\lim_{s\to p_1}(s-p_1)F(s)$$

Ogólnie

$$k_l=\lim_{s\to p_l}(s-p_l)F(s) \qquad l=1,\ldots,m \tag{2.22}$$

Przykład 2.10

Dana funkcja wymierna

$$F(s)=\frac{1}{(s+2)(s+5)}$$

Rozkład funkcji $F(s)$ na ułamki proste

$$F(s)=\frac{k_1}{(s+2)}+\frac{k_2}{(s+5)}$$

$$k_1=\lim_{s\to -2}\frac{1}{s+5}=\frac{1}{3} \qquad k_2=\lim_{s\to -5}\frac{1}{s+2}=-\frac{1}{3}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)(s+5)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{s+2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{3}}{s+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5t}$$

Biegun dwukrotny

$$F(s)=\frac{n(s)}{(s-p_1)^2(s-p_2)\dots(s-p_m)} \qquad (2.23)$$

Rozkład funkcji $F(s)$ na ułamki proste

$$F(s)=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^2}+\frac{k_{12}}{s-p_1}+\sum_{l=2}^{m}\frac{k_l}{s-p_l} \qquad (2.24)$$

Obliczenie współczynnika k_{11}

$$\lim_{s\to p_1}(s-p_1)^2F(s)=k_{11}$$

Obliczenie współczynnika k_{12}

$$(s-p_1)^2F(s)=$$

$$=k_{11}+k_{12}(s-p_1)+\sum_{l=2}^{m}(s-p_1)^2\frac{k_l}{s-p_l} \qquad (2.25)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((s-p_1)^2F(s)\right)=$$

$$=k_{12}+\sum_{l=2}^{m}k_l\frac{2(s-p_1)(s-p_l)-(s-p_1)^2}{(s-p_l)^2}$$

$$\lim_{s\to p_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((s-p_1)^2F(s)\right)=k_{12} \qquad (2.26)$$

Wyznaczenie funkcji $f(t)$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_{11}}{(s-p_1)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_{12}}{s-p_1}\right) + \sum_{l=2}^{m}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_l}{s-p_l}\right)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_{11}}{(s-p_1)^2}\right) + k_{12}e^{p_1 t} + \sum_{l=2}^{m} k_l e^{p_l t} \qquad (2.27)$$

Obliczenie pierwszego członu po prawej stronie równania (2.27)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k_{11}}{(s-p_1)^2}\right) = k_{11}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-p_1)^2}\right)$$

Zależności pomocnicze

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2} \qquad (2.28)$$

$$\mathcal{L}\left(g(t)e^{kt}\right) = \int_0^\infty g(t)e^{-(s-k)t} = G(s-k) \qquad (2.29)$$

Na podstawie (2.28) i (2.29)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-p_1)^2}\right) = te^{p_1 t} \qquad (2.30)$$

Uwzględniając (2.30) w (2.27) otrzymujemy

$$f(t) = k_{11}te^{p_1 t} + k_{12}e^{p_1 t} + \sum_{l=2}^{m} k_l e^{p_l t} \qquad (2.31)$$

Przykład 2.11

Dana funkcja

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

Wyznaczanie biegunów funkcji $F(s)$

$$(s+1)\left(s^2+2s+2\right)=0$$

$$p_1=-1 \qquad p_2=-1-\mathrm{j} \qquad p_3=p_2^*=-1+\mathrm{j}$$

Rozkład $F(s)$ na ułamki proste

$$F(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+1+\mathrm{j}}+\frac{k_3}{s+1-\mathrm{j}} \qquad (2.32)$$

Wyznaczanie współczynników $k_1, k_2\ k_3$

$$k_1=\lim_{s\to-1}(s+1)F(s)=\lim_{s\to-1}\frac{s+3}{s^2+2s+2}=2$$

$$k_2=\lim_{s\to-(1+\mathrm{j})}(s+1+\mathrm{j})F(s)=\lim_{s\to-(1+\mathrm{j})}\frac{s+3}{(s+1)(s+1-\mathrm{j})}=$$

$$=\frac{-1-\mathrm{j}+3}{(-\mathrm{j})(-1-\mathrm{j}+1-\mathrm{j})}=\frac{1}{2}(-2+\mathrm{j})=\frac{1}{2}\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.4^\circ}$$

$$k_3=\lim_{s\to-(1-\mathrm{j})}(s+1-\mathrm{j})F(s)=k_2^*=\frac{1}{2}\sqrt{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}153.4^\circ}$$

Podstawiamy $k_1, k_2\ k_3$ w (2.32) i wyznaczamy transformatę

$$f(t)=2\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.4^\circ}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j})t}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}153.4^\circ}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{j})t}$$

$$f(t)=2\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{5}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}153.4^\circ}\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j})t}\right)=$$
$$=2\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{5}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t-153.4^\circ\right)$$

2.4. Podstawy rachunku operatorowego

Równanie prądowego prawa Kirchhoffa w dziedzinie czasu

$$\sum i_k(t) = 0 \tag{2.33}$$

$$\mathcal{L}\left(\sum i_k(t)\right) = \mathcal{L}(0)$$

Równanie prądowego prawa Kirchhoffa w dziedzinie częstotliwości

$$\sum I_k(s) = 0 \tag{2.34}$$

Równanie napięciowego prawa Kirchhoffa w dziedzinie częstotliwości

$$\sum U_k(s) = 0 \tag{2.35}$$

Rezystor

Równanie w dziedzinie czasu

$$u(t) = Ri(t) \tag{2.36}$$

Równanie w dziedzinie częstotliwości

$$U(s) = RI(s) \tag{2.37}$$

Cewka

Równanie w dziedzinie czasu

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.38}$$

$$\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{L}\left(L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

Równanie w dziedzinie częstotliwości

$$U(s) = sLI(s) - Li(0) \qquad (2.39)$$

Dla $i(0) = 0$:

$$U(s) = sLI(s) \qquad (2.40)$$

Kondensator

Równanie w dziedzinie czasu

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (2.41)$$

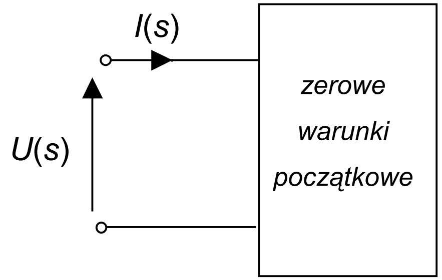
Równanie w dziedzinie częstotliwości

$$U(s) = \frac{u(0)}{s} + \frac{1}{sC}I(s) \qquad (2.42)$$

Dla $u(0) = 0$

$$U(s) = \frac{1}{sC}I(s) \qquad (2.43)$$

Impedancja operatorowa



$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z(s) \qquad (2.44)$$

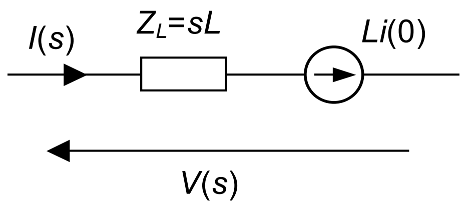
Rys. 2.4

$$Z_R(s) = R \quad Z_L(s) = sL \quad Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

Model cewki

$$U(s) = sLI(s) - Li(0) \tag{2.45}$$

Obwód opisany równaniem (2.45)

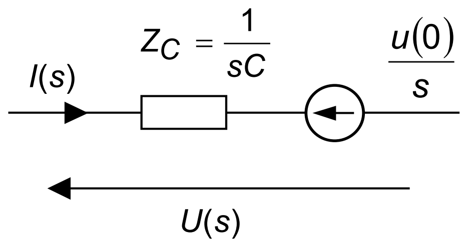


Rys. 2.5

Model kondensatora

$$U(s) = \frac{u(0)}{s} + \frac{1}{sC} I(s) \tag{2.46}$$

Obwód opisany równaniem (2.46)



Rys. 2.6

Transmitancja operatorowa systemów liniowych i stacjonarnych

Rys. 2.7

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{2.47}$$

$$H(s^*) = H^*(s) \tag{2.48}$$

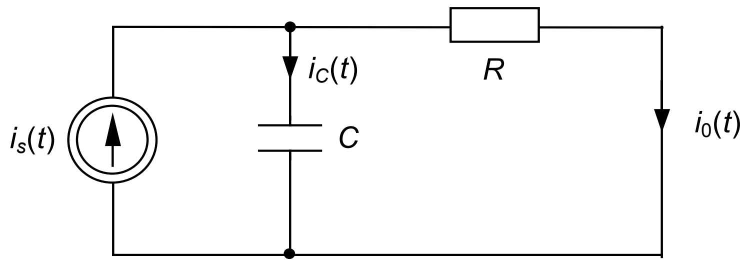
Transmitancja widmowa

$$H(\mathrm{j}\omega) = H(s)\,, \quad s = \mathrm{j}\omega \tag{2.49}$$

$$H(\mathrm{j}\omega) = |H(\mathrm{j}\omega)|\, e^{\mathrm{j}\measuredangle H(\mathrm{j}\omega)}$$

$$H(-\,\mathrm{j}\omega) = H^{*}(\mathrm{j}\omega) \tag{2.50}$$

Przykład 2.12



Rys. 2.8

$$H(s) = \frac{I_0(s)}{I_s(s)}$$

$$\begin{aligned} I_s(s) &= I_0(s) + I_C(s) = \\ &= I_0(s) + sCRI_0(s) = \\ &= (1 + sCR)I_0(s) \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{1}{1+sCR} = \frac{\frac{1}{CR}}{s + \frac{1}{CR}} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_C}}\,, \quad \omega_C = \frac{1}{RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)}$$

Odpowiedź impulsowa i jednostkowa

Odpowiedź impulsowa

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = 1$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = H(s) \tag{2.51}$$

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) \tag{2.52}$$

Odpowiedź jednostkowa

$$x(t) = 1(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{H(s)}{s} \tag{2.53}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H(s)}{s}\right) \tag{2.54}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Transformacja Fouriera

3.1 Wiadomości podstawowe

Definicja

Transformata Fouriera

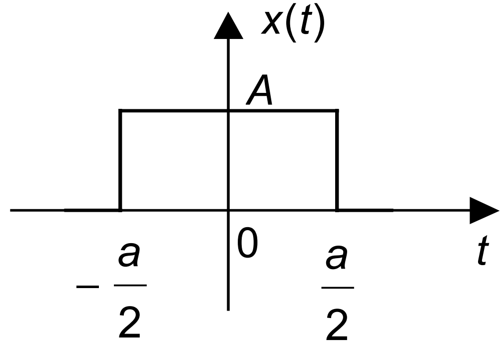
$$\mathscr{F}\left(x(t)\right) = X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad (3.1)$$

Odwrotna transformata Fouriera

$$\mathscr{F}^{-1}\left(X(\mathrm{j}\omega)\right) = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad (3.2)$$

Transformata Fouriera (3.1) przekształca sygnał $x(t)$ w dziedzinie czasu w sygnał $X(\mathrm{j}\omega)$ w dziedzinie częstotliwości

Przykład 3.1



Rys. 3.1

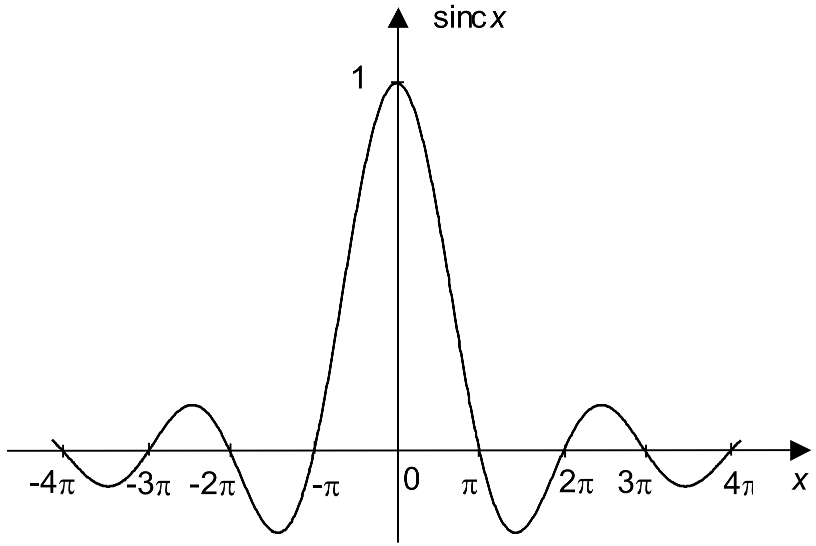
$$X(j\omega)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=-\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}=$$

$$=-\frac{A}{\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{a}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{a}{2}}\right)=\frac{2A}{\omega}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{a}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{a}{2}}}{2\mathrm{j}}=$$

$$=\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega a}{2}=aA\frac{\sin\frac{1}{2}\omega a}{\frac{1}{2}\omega a}\,.$$

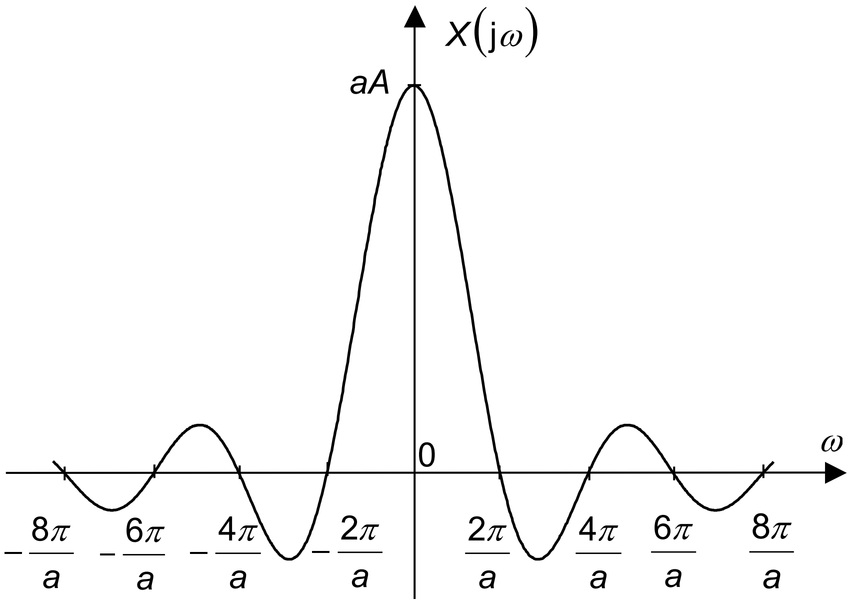
$$X(\mathrm{j}\omega)=aA\frac{\sin\frac{1}{2}\omega a}{\frac{1}{2}\omega a} \qquad (3.3)$$

$$\operatorname{sinc} x=\frac{\sin x}{x}$$



Rys. 3.2

Wykres transformaty Fouriera sygnału z rys. 3.1 w funkcji pulsacji ω



Rys. 3.3

Widmo amplitudowe i fazowe

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\cos\omega t - \mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\mathrm{d}t\ .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\mathrm{d}t = U(\omega) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\omega t\mathrm{d}t = V(\omega)$$

$$X(j\omega) = U(\omega) - \mathrm{j}V(\omega)$$

$$U(-\omega) = U(\omega) \qquad V(-\omega) = -V(\omega)$$

$$X(-j\omega) = U(\omega) + \mathrm{j}V(\omega)$$

$$|X(\mathrm{j}\omega)| = |X(-\mathrm{j}\omega)| \qquad \measuredangle X(\mathrm{j}\omega) = -\measuredangle X(-\mathrm{j}\omega)$$

$|X(\mathrm{j}\omega)|$ — widmo amplitudowe, parzysta funkcja ω

$\measuredangle X(\mathrm{j}\omega)$ — widmo fazowe, nieparzysta funkcja ω

3.2. Właściwości transformacji Fouriera

Liniowość

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{3.4}$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = \mathscr{F}(x(t)) = c_1 X_1(\mathrm{j}\omega) + c_2 X_2(\mathrm{j}\omega) \tag{3.5}$$

Transformata Fouriera dowolnej kombinacji liniowej sygnałów $x_1(t)$ i $x_2(t)$ jest taką samą kombinacją liniową ich transformat Fouriera $X_1(\mathrm{j}\omega)$ i $X_2(\mathrm{j}\omega)$.

Skalowanie

$$\mathscr{F}(x(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}\right) \tag{3.6}$$

α - liczba rzeczywista

Dowód

$\alpha > 0 \qquad u = \alpha t$

$$\mathscr{F}(x(\alpha t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}u} \mathrm{d}u = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

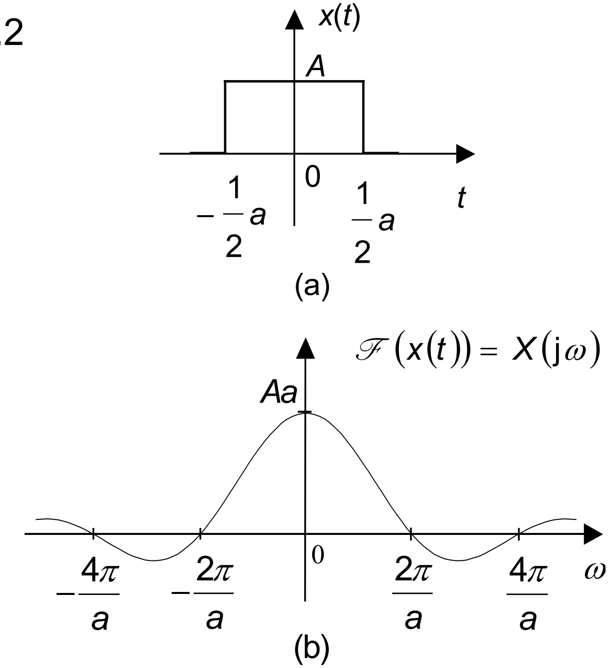
$\alpha < 0$

$$\mathscr{F}(x(\alpha t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t = \frac{-1}{\alpha} \int_{\infty}^{-\infty} x(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}u} \mathrm{d}u = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

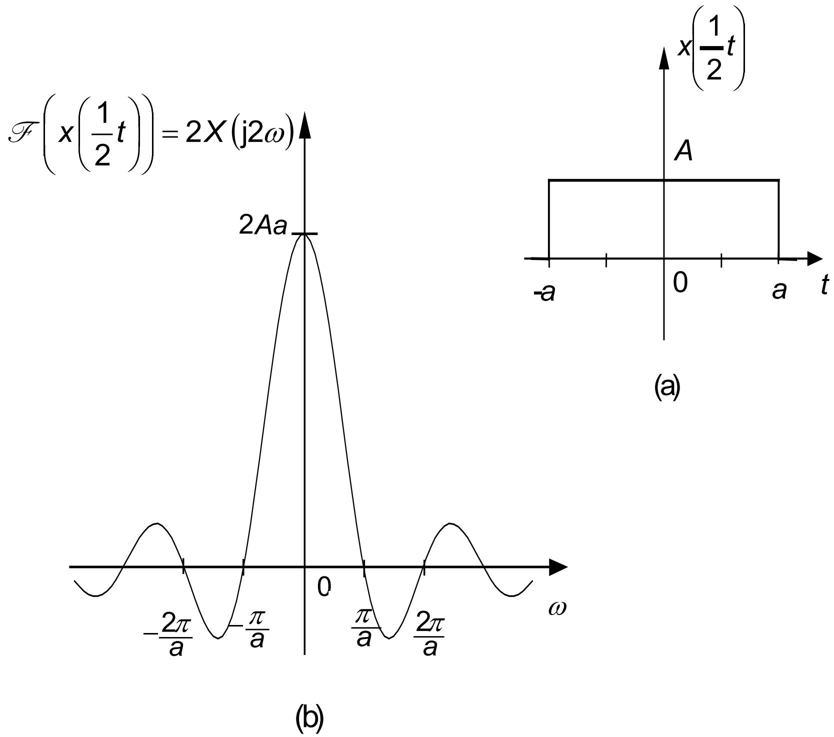
Przypadek szczególny $\alpha = -1$

$$\mathscr{F}\left(x(-t)\right) = X\left(-\,\mathrm{j}\omega\right) \tag{3.7}$$

Przykład 3.2



Rys. 3.4



Ekspansja sygnału w dziedzinie czasu powoduje kompresję w dziedzinie częstotliwości i odwrotnie.

Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu

Sygnał $x(t)$, sygnał przesunięty $x(t-t_0)$

$$\mathscr{F}(x(t)) = X(\mathrm{j}\omega)$$

$$\mathscr{F}(x(t-t_0)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} X(\mathrm{j}\omega) \tag{3.8}$$

Dowód

$$\mathscr{F}(x(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t-t_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{d}(t-t_0)$$

Podstawienie $u = t - t_0$

$$\mathscr{F}(x(t-t_0)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega u}\mathrm{d}u =$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} X(\mathrm{j}\omega)$$

Wniosek

$$\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} X(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\right|\left|X(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|X(\mathrm{j}\omega)\right|$$

Widmo amplitudowe sygnału przesuniętego jest takie samo jak sygnału oryginalnego

$$\measuredangle\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} X(\mathrm{j}\omega)\right) = \measuredangle(X(\mathrm{j}\omega)) - \omega t_0$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$\mathcal{F}\left(x(t)\right) = X(\mathrm{j}\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right) = X\left(\mathrm{j}(\omega - \omega_0)\right) \qquad (3.9)$$

Dowód

$$\mathcal{F}\left(x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t = X\left(\mathrm{j}(\omega - \omega_0)\right)$$

Przykład 3.3

Modulacja amplitudowa

$$g(t) = x(t)\cos\omega_0 t \qquad (3.10)$$

$x(t)$ - wiadomość, $\cos\omega_0 t$ - nośnik

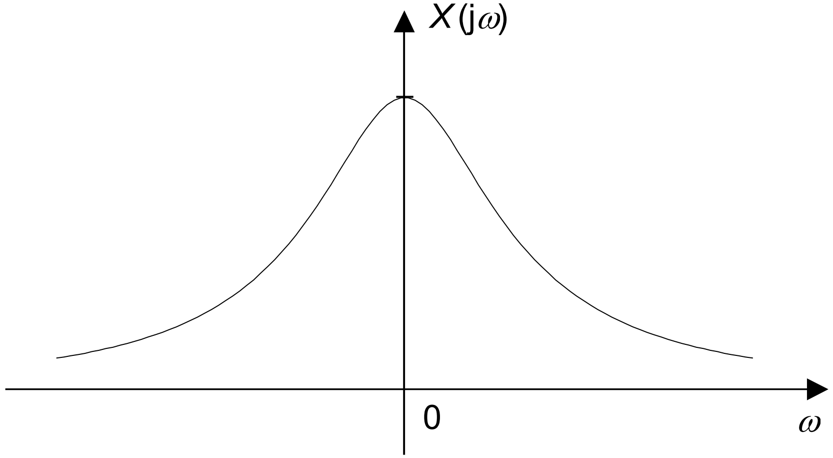
$$\cos\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}$$

$$g(t) = \frac{1}{2}x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$$

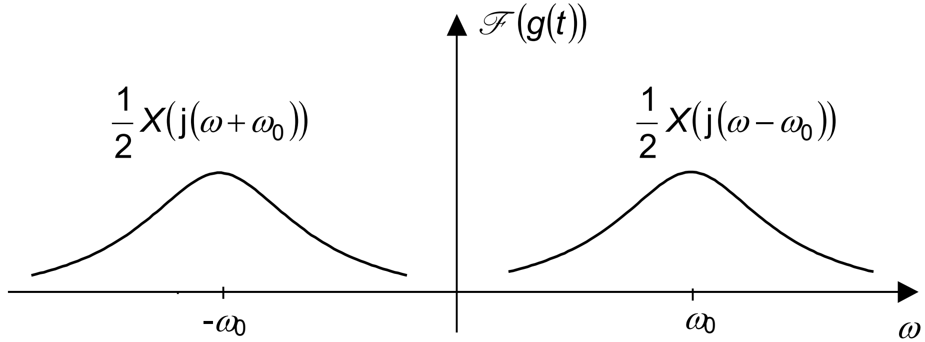
Na podstawie twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości

$$\mathscr{F}(g(t)) = \frac{1}{2}X(\mathrm{j}(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}X(\mathrm{j}(\omega+\omega_0)) \qquad (3.11)$$

Transformata Fouriera sygnału niosącego wiadomość



Rys. 3.6



Rys. 3.7

Transformata Fouriera sygnału $g(t)$ składa się z dwóch połówek transformaty Fouriera sygnału $x(t)$, z których jedna jest przesunięta o ω_0 a druga o $-\omega_0$

Twierdzenie o różniczkowaniu

$$\mathscr{F}(x(t)) = X(\mathrm{j}\omega)$$

$$\mathscr{F}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega) \qquad (3.12)$$

Dowód

Odwrotna transformata Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \, \mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega)$$

Uogólnienie

$$\mathscr{F}\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} = (\mathrm{j}\omega)^n X(\mathrm{j}\omega) \qquad (3.13)$$

Twierdzenie o transformacie splotu

Splot sygnałów $x_1(t)$ i $x_2(t)$

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (3.14)$$

Transformata Fouriera splotu sygnałów $x_1(t)$ i $x_2(t)$

$$\mathscr{F}(x(t)) = X_1(\mathrm{j}\omega)X_2(\mathrm{j}\omega) \qquad (3.15)$$

3.3. Uogólniona transformacja Fouriera

$\delta(t)$ - impuls Diraca

$$\mathscr{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

$$\mathscr{F}(\delta(t)) = 1 \qquad (3.16)$$

Transformacja przesuniętego impulsu Diraca

$$\mathscr{F}(\delta(t - t_0)) = e^{-j\omega t_0}$$

Dana transformata Fouriera $F(j\omega) = \delta(\omega)$ pewnej funkcji $f(t)$

Funkcję $f(t)$ określa odwrotna transformata Fouriera

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}(\delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}(1) = 2\pi\delta(\omega) \qquad (3.17)$$

Dana transformata Fouriera $\mathscr{F}(j\omega) = \delta(\omega)$ pewnej funkcji $f(t)$

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}(\delta(\omega + \omega_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t}\Big|_{\omega=-\omega_0} = \frac{1}{2\pi} e^{-j\omega_0 t}$$

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right) = 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \qquad (3.18)$$

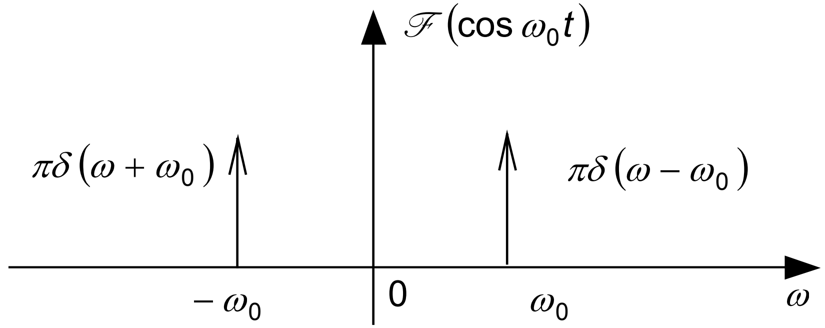
$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \qquad (3.19)$$

Transformata Fouriera funkcji $\cos\omega_0 t$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)$$

$$\mathscr{F}(\cos\omega_0 t) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \qquad (3.20)$$

Obraz graficzny transformaty Fouriera funkcji $\cos\omega_0 t$



Rys. 3.8

Transformata Fouriera funkcji $\sin\omega_0 t$

$$\mathscr{F}(\sin\omega_0 t) = \mathscr{F}\left(\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\mathrm{j}}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) =$$

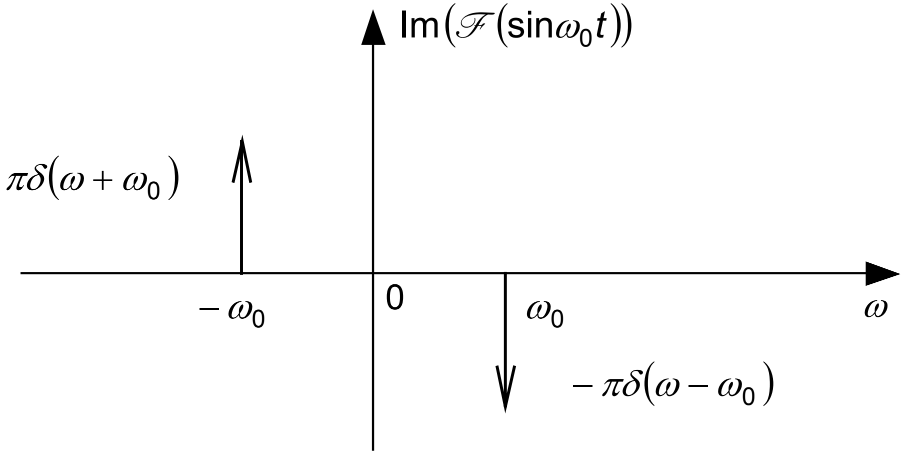
$$= \mathrm{j}\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$\mathrm{Re}\left(\mathscr{F}(\sin\omega_0 t)\right) = 0 \tag{3.21}$$

$$\mathrm{Im}\left(\mathscr{F}(\sin\omega_0 t)\right) = \pi\left(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right) \tag{3.22}$$

Obraz graficzny transformaty Fouriera funkcji $\sin\omega_0 t$



Rys. 3.9

3.4. Transformacja Fouriera funkcji okresowych

Rozkład funkcji okresowej $x(t)$ w szereg Fouriera

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \tag{3.23}$$

$\tilde{c}_k$ - współczynniki wykładniczej postaci szeregu Fouriera

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

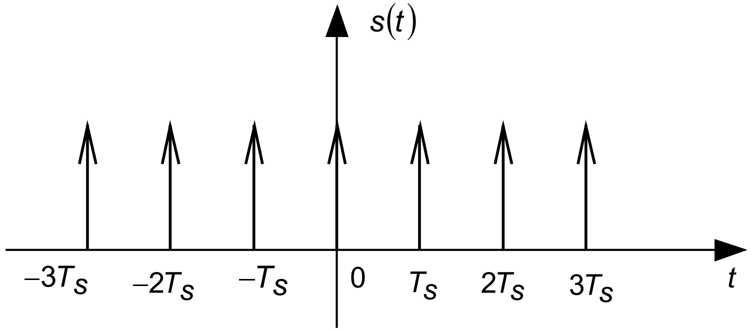
$$X(\mathrm{j}\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{c}_k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\right)$$

$$\mathscr{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\right) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(\mathrm{j}\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \delta(\omega - k\omega_0) \qquad (3.24)$$

Przykład 3.4

Dany sygnał okresowy $s(t)$



Rys. 3.10

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \qquad (3.25)$$

Rozkład sygnału $s(t)$ w wykładniczy szereg Fouriera

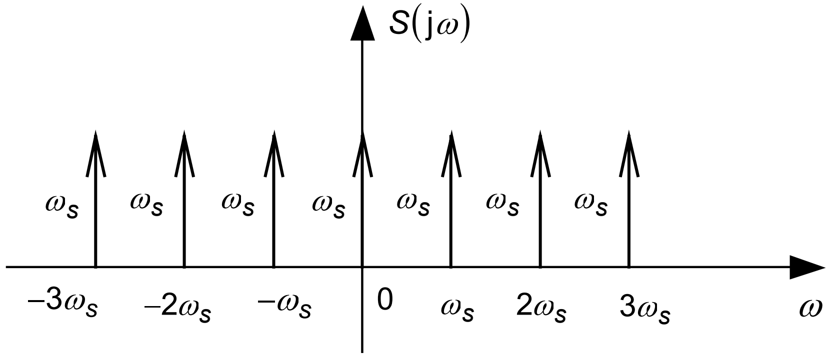
$$\tilde{c}_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_s t} \mathrm{d}t = \frac{1}{T_s} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$s(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_s t} \qquad (3.26)$$

Transformata Fouriera sygnału $s(t)$

$$S(\mathrm{j}\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad (3.27)$$

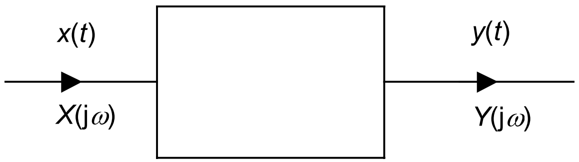
Obraz graficzny transformaty Fouriera sygnału $s(t)$



Rys. 3.11

3.5. Odpowiedź systemu

Dany system liniowy i stacjonarny



Rys. 3.12

Odpowiedź systemu w dziedzinie czasu

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.28)$$

Odpowiedź systemu w dziedzinie częstotliwości

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \qquad (3.29)$$

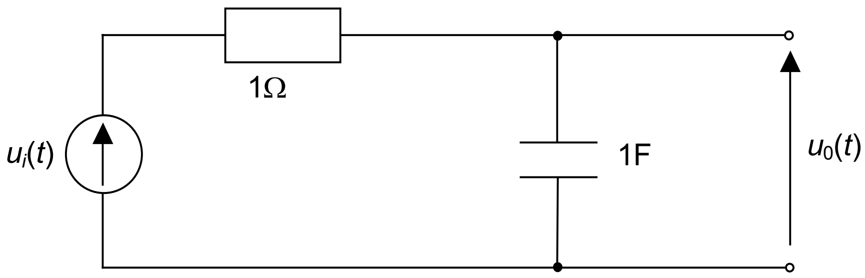
$$H(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} h(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \left.\int_{0}^{\infty} h(t)\,e^{-st}\mathrm{d}t\right|_{s=\mathrm{j}\omega} = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

Wyznaczanie transmitancji widmowej

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} \qquad (3.30)$$

Przykład 3.5

Dany układ liniowy



Rys. 3.13

$$u_i(t) = \mathrm{e}^{-2t}1(t)$$

Wyznaczenie transmitancji operatorowej

$$H(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)}$$

$$U_0(s) = \frac{U_i(s)}{1+\frac{1}{s}}\cdot\frac{1}{s} = \frac{U_i(s)}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Transmitancja widmowa

$$H(\mathrm{j}\omega) = H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\operatorname{arctg}^{-1}\omega} \quad (3.31)$$

Transformata Fouriera sygnału wejściowego

$$U_i(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(2+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(2+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2+\mathrm{j}\omega} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\operatorname{arctg}^{-1}\frac{\omega}{2}}.$$

$$U_0(\mathrm{j}\omega) = \left|U_0(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$$

$$U_0(\mathrm{j}\omega) = H(\mathrm{j}\omega)U_i(\mathrm{j}\omega)$$

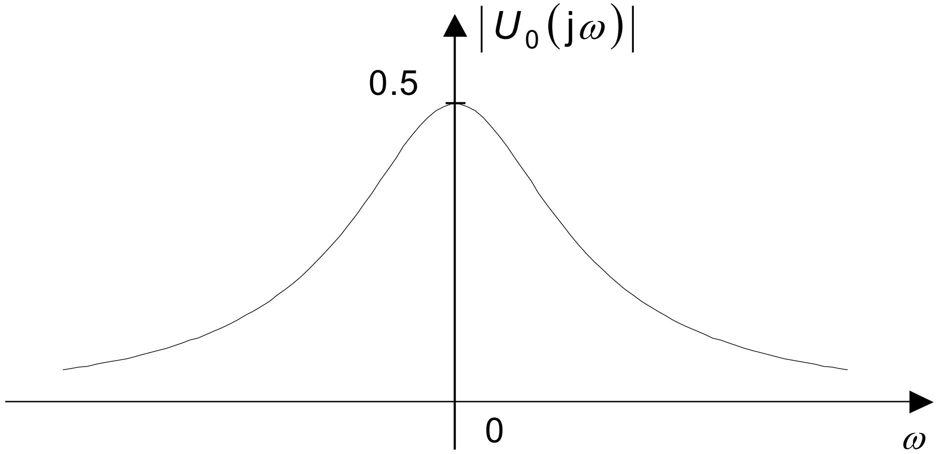
Widmo amplitudowe sygnału $u_0(t)$

$$|U_0(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}}$$

Widmo fazowe sygnału $u_0(t)$

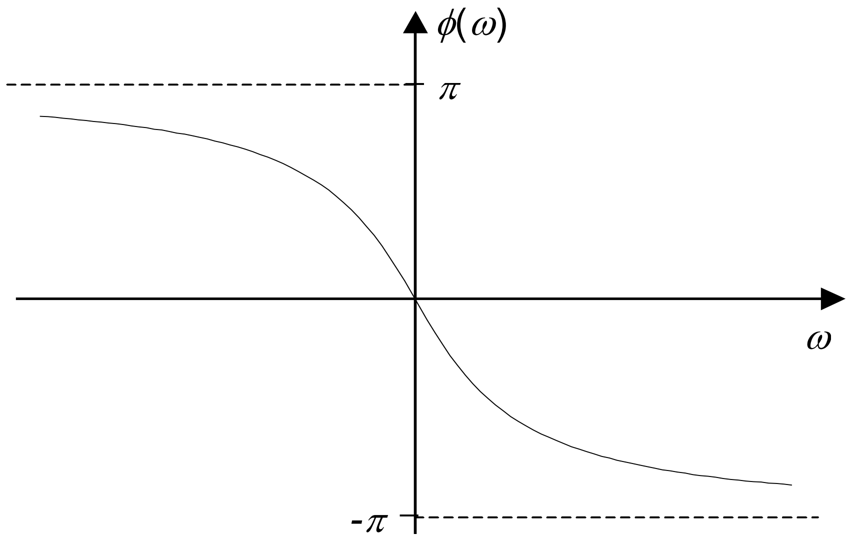
$$\phi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\omega - \mathrm{arctg}\frac{\omega}{2}$$

Widmo amplitudowe sygnału $u_0(t)$



Rys. 3.14

Widmo fazowe sygnału $u_0(t)$



Rys. 3.15

4. Transformacja Fouriera sygnałów dyskretnych (DTFT)

4.1. Wprowadzenie

Transformata Fouriera sygnału ciągłego

$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$x(mT_s)$ - spróbkowany sygnał $x(t)$

$$X(\mathrm{j}\omega) \cong \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega m T_s}\,T_s \qquad (4.1)$$

$\tilde{\omega} = \omega T_s = \dfrac{\omega}{f_s}$ - pulsacja znormalizowana

Oznaczenie: $x(mT_s) = x(m)$

Transformata Fouriera sygnału dyskretnego $x(m)$

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\omega}}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tilde{\omega}m} \qquad (4.2)$$

Przykład 4.1

Dany sygnał dyskretny

$$x(m) = a^m u(m) \qquad |a| < 1$$

Transformata Fouriera sygnału $x(m)$

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\omega}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\tilde{\omega}} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tilde{\omega}}\right)^m$$

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tilde{\omega}}\right) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tilde{\omega}}}$$

Przykład 4.2

Transformata Fouriera próbki jednostkowej

$$X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(m)e^{-j\tilde{\omega}m}=1$$

4.2. Właściwości transformacji Fouriera sygnałów dyskretnych

Okresowość

$$X\left(e^{j(\tilde{\omega}+2\pi)}\right)=X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) \qquad (4.3)$$

Dowód

$$X\left(e^{(j\tilde{\omega}+2\pi)}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,e^{-jm(\tilde{\omega}+2\pi)}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,e^{-jm\tilde{\omega}}e^{-jm2\pi}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,e^{-jm\tilde{\omega}}=X\left(e^{(j\tilde{\omega})}\right)$$

Liniowość

$$x(m)=a_1x_1(m)+a_2x_2(m)$$

$$X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)=a_1X_1\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)+a_2X_2\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)$$

Przesunięcie

$$x(m)$$

$\hat{x}(m)=x(m-m_0)$ przesunięty o m_0 sygnał $x(m)$

Transformata Fouriera sygnału przesuniętego

$$\hat{X}\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m-m_0)\,e^{-jm\tilde{\omega}}= \qquad (4.4)$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m-m_0)\,e^{-j(m-m_0)\tilde{\omega}}e^{-jm_0\tilde{\omega}}$$

$$k=m-m_0$$

$$\hat{X}\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)=e^{-jm_0\tilde{\omega}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\,e^{-jk\tilde{\omega}}= \qquad (4.5)$$
$$=e^{-jm_0\tilde{\omega}}X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)$$

Przykład 4.3

$$x(m)=\delta(m-m_0), \quad X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)=e^{-jm_0\tilde{\omega}}$$

Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$x(m) \longrightarrow X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)$$

$$\hat{x}(m)=x(m)\,e^{jm\omega_0}$$

Transformata Fouriera sygnału $\hat{x}(m)$

$$\hat{X}\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,e^{jm\omega_0}e^{-jm\tilde{\omega}}=$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\,e^{-jm(\tilde{\omega}-\omega_0)}= \qquad (4.6)$$
$$\underline{\underline{=X\left(e^{j(\tilde{\omega}-\omega_0)}\right)}}$$

Transformata splotu

Dany splot sygnałów $x(m)$ i $y(m)$

$$w(m)=x(m)*y(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\,y(m-k) \qquad (4.7)$$

Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Transformata splotu

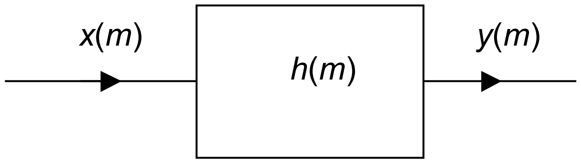
$$W\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) = X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)Y\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) \qquad (4.8)$$

Twierdzenie Parsevala

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| x(m)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left| X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)\right|^2 d\tilde{\omega} \qquad (4.9)$$

4.3. Odpowiedź dyskretnych systemów liniowych i stacjonarnych

$h(m)$ - odpowiedź systemu na próbkę jednostkową



Rys. 4.1

Odpowiedź systemu w dziedzinie czasu

$$y(m) = h(m) * x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(m-k)$$

Na podstawie twierdzenia o transformacie splotu otrzymujemy odpowiedź systemu w dziedzinie częstotliwości

$$Y\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) = H\left(e^{j\tilde{\omega}}\right)X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) \qquad (4.10)$$

5. Dyskretna transformacja Fouriera (DFT)

5.1. Wiadomości podstawowe

Definicja:

Dany ciąg $\{f_m\}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych:

$$f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$$

Dyskretna transformata Fouriera jest ciągiem $\{F_n\}$

$$F_0, F_1, \ldots, F_{N-1}$$

gdzie

$$F_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m w^{-mn} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \qquad (5.1)$$

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

Odwrotna dyskretna transformata Fouriera

$$f_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_n w^{mn} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Właściwości DTF

Dla ciągu utworzonego z liczb rzeczywistych i dowolnego $\hat{n} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ zachodzi

$$F_{N-\hat{n}} = F_{\hat{n}}^{*} \qquad (5.2)$$

Przykład 5.1

Dla ciągu

$f_m = 2$ dla $m = 0, 1$ $\quad f_m = 1$ dla $m = 2, 3$

wyznaczyć DFT

Ponieważ $N = 4$, więc $w = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}$

Ze wzoru definicyjnego wynika

$$F_n = \sum_{m=0}^{3} f_m \mathrm{j}^{-mn} = 2 + 2\mathrm{j}^{-n} + \mathrm{j}^{-2n} + \mathrm{j}^{-3n} = \\ = 2 + 2\mathrm{j}^{-n} + (-1)^n + \mathrm{j}^n \; . \qquad (5.3)$$

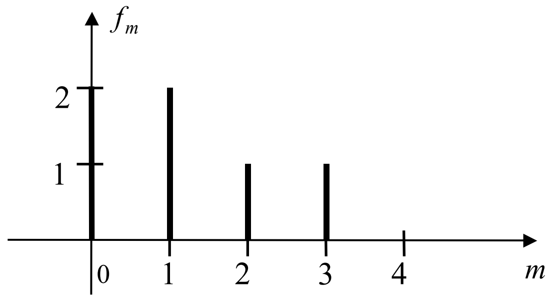
Podstawiając do zależności (5.3) $n = 0, 1, 2, 3$ otrzymujemy

$$F_0 = 6,\; F_1 = 1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}45^\circ},\; F_2 = 0,\; F_3 = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}$$

$|F_n|$ - widmo amplitudowe sygnału $\{f_m\}$

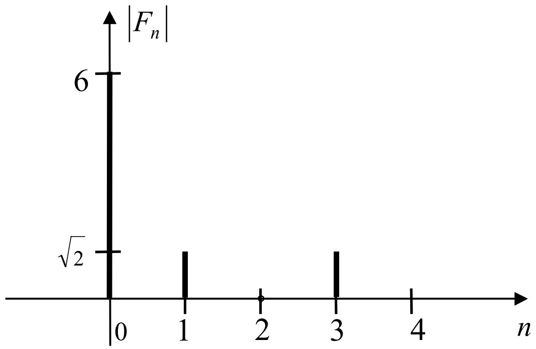
$\measuredangle(F_n)$ - widmo fazowe sygnału $\{f_m\}$

Obraz graficzny ciągu $\{f_m\}$



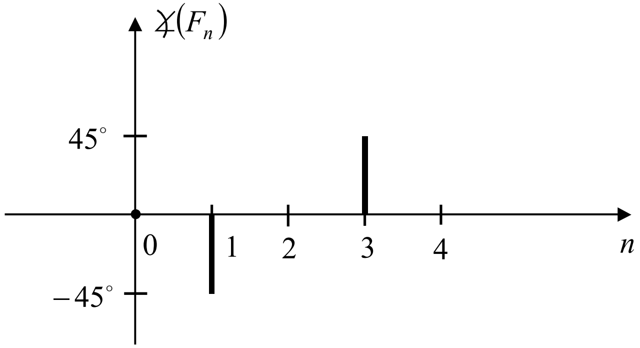
Rys. 5.1

Widmo amplitudowe sygnału z rys. 5.1



Rys. 5.2

Widmo fazowe sygnału z rys. 5.1



Rys. 5.3

5.2. Ciągi okresowe o okresie *N*

Dyskretną transformatę Fouriera określa się dla ciągu N liczb odpowiadającego okresowi

Liniowość DFT

DFT kombinacji liniowej sygnałów $\{f_m\}$ oraz $\{g_m\}$

$$\{h_m\} = \{\alpha f_m + \beta g_m\}$$

jest taką samą kombinacją liniową ich transformat

$$\{H_n\} = \{\alpha F_n + \beta G_n\}$$

Dowód

$$H_n = \sum_{m=0}^{N-1} (\alpha f_m + \beta g_m) w^{-mn} = \alpha \sum_{m=0}^{N-1} f_m w^{-mn} +$$

$$+ \beta \sum_{m=0}^{N-1} g_m w^{-mn} = \alpha F_n + \beta G_n$$

Twierdzenie o przesunięciu

Dany sygnał okresowy $\{f_m\}$ mający dyskretną transformatę Fouriera $\{F_n\}$.

Dyskretna transformata Fouriera sygnału przesuniętego

$$\{f_{m+k}\} \quad \text{wynosi} \quad \{H_n\} = \{w^{kn} F_n\} \qquad (5.4)$$

Przykład 5.2

Dane ciągi okresowe

$$\{f_m\} = \{1, 1, 0, 0\}, \quad \{g_m\} = \{0, 0, 1, 1\}$$

Wyznaczenie dyskretnej tarnsformaty Fouriera ciągu $\{f_m\}$

$$N = 4 \qquad w = e^{j\frac{2\pi}{4}} = j$$

$$F_n = \sum_{m=0}^{3} f_m w^{-mn} = \sum_{m=0}^{1} j^{-mn}$$

$$F_0 = 2, \quad F_1 = 1 - j, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 1 + j$$

Bezpośrednie wyznaczenie dyskretnej transformaty Foureira sygnału $\{g_m\}$

$$G_n = \sum_{m=0}^{3} g_m w^{-mn} = \sum_{m=2}^{3} j^{-mn}$$

$$G_0 = 2, \quad G_1 = -1 + j, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = -1 - j$$

Zależności pomiędzy sygnałami $\{f_m\}$ i $\{g_m\}$

$$g_m = f_{m-2}$$

Wyznaczenie dyskretnej transformaty Fouriera sygnału $\{g_m\}$ na podstawie twierdzenia o przesunięciu

$$G_n = w^{-2n} F_n = \mathrm{j}^{-2n} F_n$$

$$G_0 = 2, \quad G_1 = \mathrm{j}^{-2} F_n = -1 + \mathrm{j}, \quad G_2 = F_2 = 0,$$

$$G_3 = \mathrm{j}^{-6} F_3 = -F_3 = -1 - \mathrm{j}\,.$$

Splot okresowy sygnałów $\{f_m\}$ i $\{g_m\}$ o tym samym okresie *N*

Definicja

$$h_n = f_n * g_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m} \tag{5.5}$$

Twierdzenie o splocie okresowym

Dyskretna transformata Fouriera sygnału

$$h_n = f_n * g_n$$

wynosi

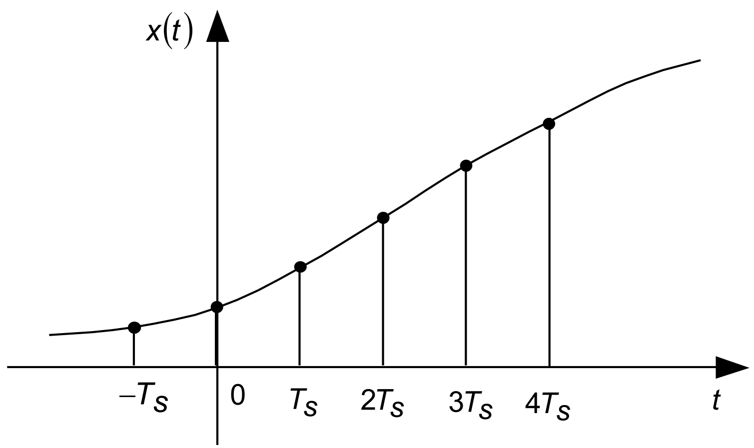
$$H_n = F_n G_n \tag{5.6}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6. Próbkowanie sygnałów ciągłych

6.1. Sygnał spróblowany impulsowo

Założenie: sygnały o ograniczonym paśmie częstotliwości



$t = mT_s$

Rys. 6.1

Sygnał spróbkowany impulsowo

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s)\delta(t - mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - mT_s) \tag{6.1}$$

Widmo sygnału spróbkowanego impulsowo

$$\begin{aligned}\hat{X}(\mathrm{j}\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - mT_s)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t - mT_s)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.2}$$

$s(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT_s)$ - sygnał okresowy o okresie T_s

Rozkład $s(t)$ w szereg Fouriera

$$s(t)=\frac{1}{T_s}\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_s\upsilon t} \tag{6.3}$$

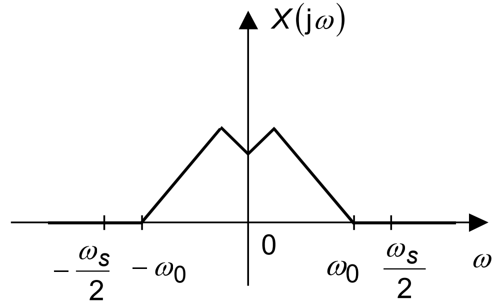
$$\hat{X}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(t)e^{-j\omega t}\frac{1}{T_s}\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty}e^{j\omega_s\upsilon t}\right)dt \tag{6.4}$$

$$\hat{X}(j\omega)=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty}\left(x(t)e^{-j(\omega-\omega_s\upsilon)t}\right)dt \tag{6.5}$$

$$\hat{X}(j\omega)T_s=\sum_{\upsilon=-\infty}^{\infty}X(j(\omega-\omega_s\upsilon)) \tag{6.6}$$

Przykład 6.1

Widmo sygnału o ograniczonym paśmie częstotliwości

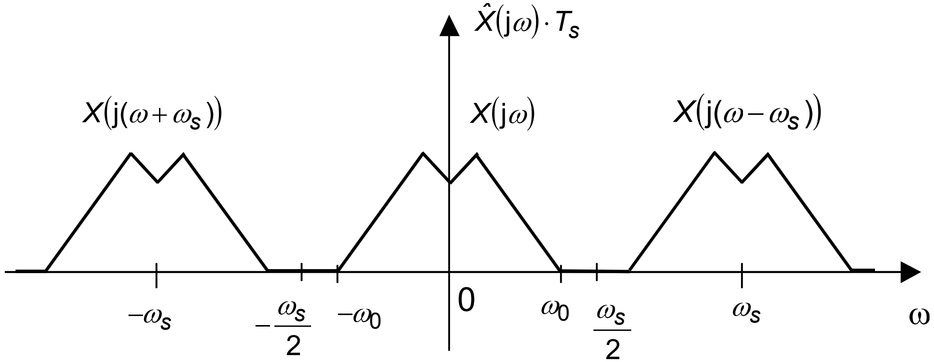


Rys. 6.2

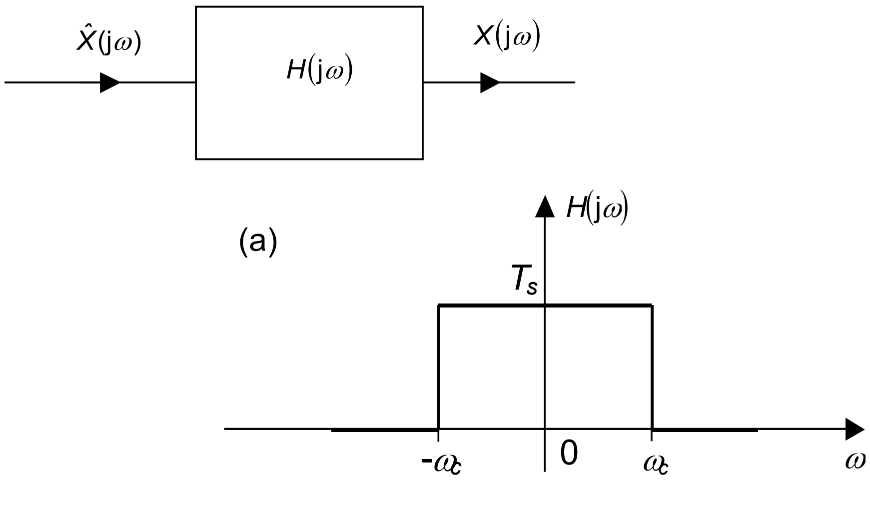
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Widmo sygnału spróbkowanego impulsowo

pomnożone przez T_s dla $\frac{\omega_s}{2} > \omega_0$



Rys. 6.3



(b)

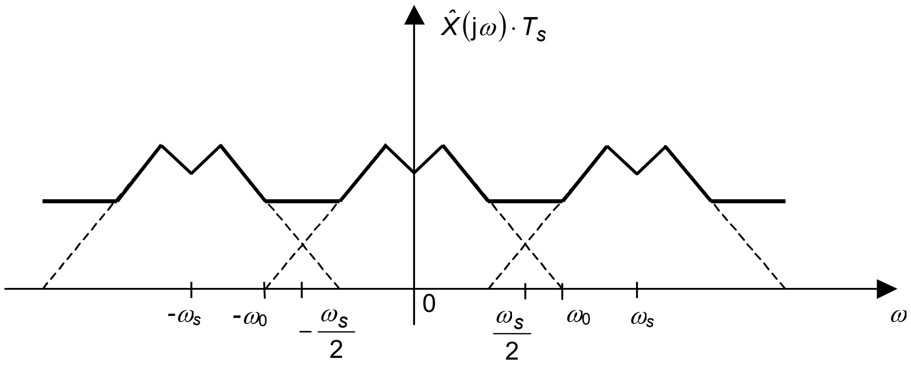
Rys. 6.4

$$X(j\omega) = \hat{X}(j\omega)H(j\omega) \qquad (6.7)$$

Widmo sygnału spróbkowanego impulsowo

pomnożone przez T_s dla $\frac{\omega_s}{2} < \omega_0$.

Zjawisko aliasingu.



Rys. 6.5

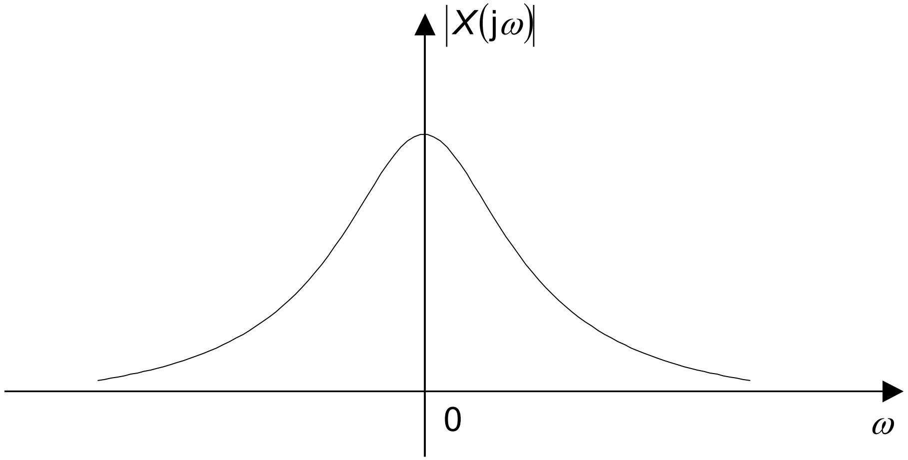
6.2. Twierdzenie o próbkowaniu (Shannona)

Niech $x(t)$ będzie sygnałem czasu ciągłego o ograniczonym paśmie częstotliwości $(-\omega_0, \omega_0)$. Niech sygnał $x(t)$ będzie reprezentowany za pomocą próbek $x(mT_s)$ wyznaczonych z częstotliwością próbkowania $f_s = \frac{1}{T_s}$, czyli pulsacją $\omega_s = 2\pi f_s$.

Jeżeli $\omega_s > 2\omega_0$, to sygnał $x(t)$ może być dokładnie odtworzony na podstawie próbek $x(mT_s)$.

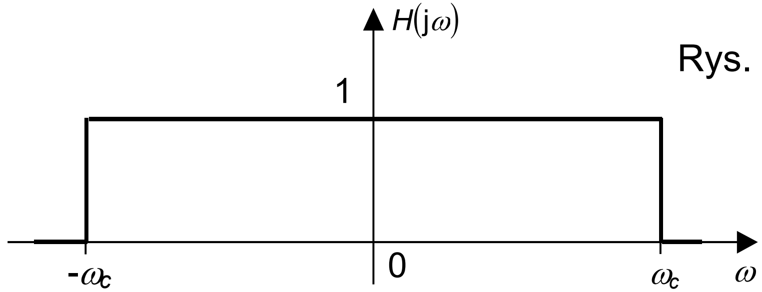
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Sygnały nie spełniające warunku ograniczonego pasma częstotliwości

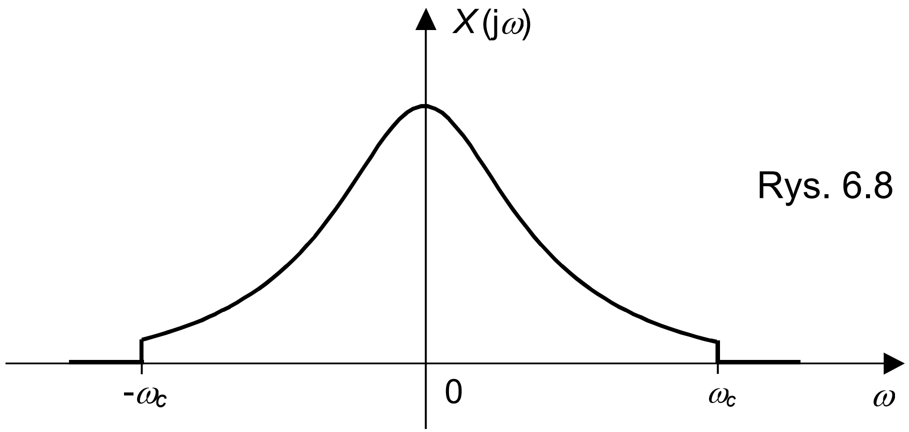


Rys. 6.6

Filtr anty-aliasingowy



Rys. 6.7



Rys. 6.8

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

7. Transformacja *Z*

7.1. Wiadomości podstawowe

Definicja

$x(n)$ - ciąg liczbowy (sygnał dyskretny)
z – zmienna zespolona

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \qquad (7.1)$$

Oznaczenie transformaty *Z*

$$Z(x(n)) = X(z)$$

Odwrotna transformata *Z*

$$x(n) = Z^{-1}(X(z))$$

Transformata Fouriera ciągu skończonego

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots + x(N)z^{-N} \quad (7.2)$$

Przykład 7.1

Dana próbka jednostkowa (impuls jednostkowy)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases} \qquad (7.3)$$

Transformata *Z* próbki jednostkowej

$$Z(\delta(n)) = 1 \qquad (7.4)$$

Przykład 7.2

Dany sygnał dyskretny

$$\{x(n)\} = \{1, a, a^2, \ldots\}$$

Transformata Z sygnału $x(n)$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \quad (7.5)$$

$X(z)$ jest granicą szeregu geometrycznego (7.5)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \quad (7.6)$$

Dla $a = 1$ sygnał $x(n)$ staje się dyskretną funkcją jednostkową

Na podstawie (7.6) otrzymujemy

$$Z(1(n)) = \frac{z}{z-1} \quad (7.7)$$

7.2. Właściwości transformacji Z

Liniowość

$x_1(n), x_2(n)$ - sygnały dyskretne,
$X_1(z) = Z(x_1(n)),\ X_2(z) = Z(x_2(n)),\ c_1, c_2$ - stałe

Zachodzi zależność

$$Z(c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)) = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z) \quad (7.8)$$

Wniosek: transformacja Z jest operacją liniową

Przykład 7.3

Wyznaczyć transformatę Z sygnału

$$x(n) = (0.3)^n - 2(0.5)^n$$

Korzystając z liniowości transformacji Z oraz ze wzoru (7.6) otrzymujemy

$$X(z) = \frac{z}{z-0.3} - 2\frac{z}{z-0.5} = \frac{-z\,(z-0.1)}{(z-0.3)\,(z-0.5)}$$

Reguła różniczkowania

Transformacja Z sygnału $x(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,z^{-n}$$

Pochodna funkcji $X(z)$

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{dz} = -\sum_{n=0}^{\infty} x(n)nz^{-n-1}$$

Po przekształceniach

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)nz^{-n} = Z(nx(n))$$

Wzór pozwalający wyznaczyć transformatę *Z* sygnału $n(n)$

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = Z(nx(n)) \qquad (7.9)$$

Przykład 7.4

Dany sygnał dyskretny

$$x(n) = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Sygnał $x(n)$ wyrażony w kategoriach funkcji jednostkowej $1(n)$

$$x(n) = n1(n)$$

gdzie

$$1(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Obliczenie transformaty Z sygnału $x(n)$

$$Z(x(n)) = Z(n1(n)) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}Z(1(n)) \qquad (7.10)$$

Transformata Z sygnału $1(n)$

$$Z(1(n)) = \frac{z}{z-1} \qquad (7.11)$$

Transformata Z sygnału $x(n)$ obliczona ze wzoru (7.10), przy uwzględnieniu (7.11)

$$X(z) = Z(x(n)) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad (7.12)$$

Przykład 7.5

Dany sygnał dyskretny

$$x(n) = \left\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT} \right\} \qquad (7.13)$$

Postać równoważna

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} \right)^n$$

Podstawienie

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} = a$$

Obliczanie transformaty Z sygnału (7.13) na podstawie wzoru (7.6)

$$Z\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}\right) = \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}} \qquad (7.14)$$

Analogicznie

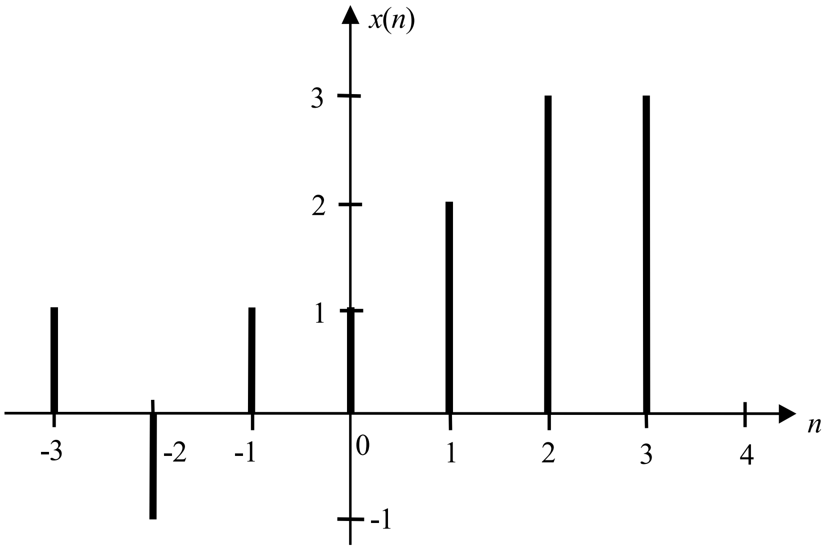
$$Z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT}\right) = \frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}} \qquad (7.15)$$

Korzystając z (7.14) i (7.15) obliczamy transformatę Z sygnału $\cos n\omega T = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega T} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega T}\right)$

$$Z(\cos n\omega T) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}} + \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}} \right) \qquad (7.16)$$

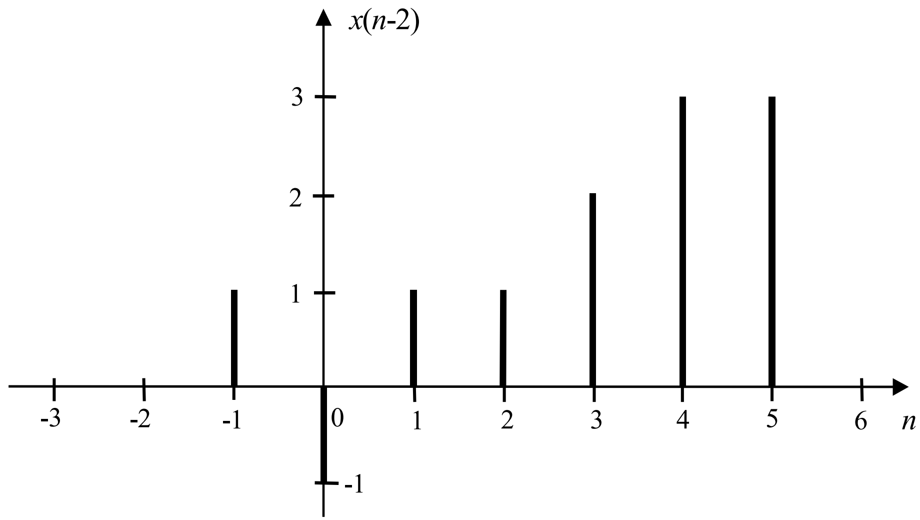
Przesunięcie sygnału

Dany sygnał $x(n)$, pokazany na rys. 7.1



Rys. 7.1

Sygnał przesunięty $x(n-2)$



Rys. 7.2

Transformata *Z* sygnału $Z(x(n-2))$

$$Z(x(n-2)) = -1 + z^{-1} + z^{-2} Z(x(n))$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ogólnie

$$Z(x(n-k)) = \tag{7.17}$$

$$= x(-k) + x(-k+1)z^{-1} + \ldots + x(-1)z^{-(k-1)} + z^{-k}X(z)$$

Jeżeli $x(n) = 0$ dla $n < 0$, to

$$Z(x(n-k)) = z^{-k}X(z) \tag{7.18}$$

7.3. Odwrotna transformacja *Z*

$$x(n) = Z^{-1}(X(z)) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

C – krzywa zamknięta na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z obejmująca początek układu współrzędnych, leżąca w obszarze zbieżności i mająca orientację przeciwną do ruchu wskazówek zegara

Właściwość liniowości

Odwrotna transformata *Z* jest operacją liniową

Obliczanie odwrotnej transformaty *Z* funkcji wymiernych

Przykład 7.6

Dana funkcja wymierna

$$X(z) = \frac{z}{(z-0.4)(z-0.8)}$$

Obliczenie funkcji $\frac{X(z)}{z}$ i jej rozkład na ułamki proste

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-0.4)(z-0.8)} = \frac{k_1}{z-0.4} + \frac{k_2}{z-0.8}$$

$$k_1 = \lim_{z\to 0.4}(z-0.4)\frac{X(z)}{z} = -2.5$$

$$k_2 = \lim_{z\to 0.8}(z-0.8)\frac{X(z)}{z} = 2.5$$

$$X(z) = -2.5\frac{z}{z-0.4} + 2.5\frac{z}{z-0.8}$$

Na podstawie liniowości odwrotnej transformaty *Z* oraz wzoru (7.6):

$$x(n) = -2.5 \cdot (0.4)^n + 2.5 \cdot (0.8)^n$$

7.4. Splot dyskretny

Dane sygnały $x_1(n)$ oraz $x_2(n)$

Założenie

$$x_1(n) = x_2(n) \equiv 0 \text{ dla ujemnych } n$$

Teza

$$Z(x_1(n) * x_2(n)) = X_1(z)X_2(z) \tag{7.19}$$

Dowód

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) =$$

$$= \left(x_1(0) + x_1(1)z^{-1} + x_1(2)z^{-2} + \cdots\right) \cdot \tag{7.20}$$

$$\cdot \left(x_2(0) + x_2(1)z^{-1} + x_2(2)z^{-2} + \cdots\right)$$

$X(z)$ jest transformatą *Z* pewnego sygnału $x(n)$

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots \tag{7.21}$$

Porównanie odpowiednich współczynników wyrażeń (7.20) i (7.21)

$$x(0) = x_1(0)x_2(0)$$
$$x(1) = x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0)$$
$$x(2) = x_1(0)x_2(2) + x_1(1)x_2(1) + x_1(2)x_2(0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ogólnie

$$x(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m)x_2(n-m) = \tag{7.22}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = x_1(n) * x_2(n)$$

7.5. Systemy dyskretne, liniowe i stacjonarne

Dany system dyskretny o odpowiedzi na próbkę jednostkową, $h(n)$

$x(n)$ - sygnał wejściowy, $x(n) = 0$ dla $n < 0$;

$y(n)$ - sygnał wyjściowy

Zachodzi wzór (1.23):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Ponieważ $x(n) = 0$ dla $n < 0$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{7.23}$$

Na podstawie (7.19):

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{7.24}$$

Dany system opisany równaniem różnicowym

$$\begin{aligned} a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_k y(n-k) &= \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_\mathrm{p} x(n-\mathrm{p}) \end{aligned} \tag{7.25}$$

$x(n)$ - sygnał wejściowy, $y(n)$ - sygnał wyjściowy

Założenie:

$x(n) = 0$ dla $n < 0$, $y(n) = 0$ dla $n < 0$

Wyznaczamy transformatę *Z* obu stron równania (7.25)

$$\begin{aligned} a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_k z^{-k} Y(z) &= \\ = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \cdots + b_\mathrm{p} z^{-p} X(z) \end{aligned}$$

Stąd wynika

$$H = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_p z^{-p}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_k z^{-k}} \tag{7.26}$$

$H(z)$ - transmitancja systemu dyskretnego

Przykład 7.7

Dany jest system dyskretny opisany równaniem różnicowym

$$y(n) - 2y(n-1) = 3x(n), \qquad y(-1) = 0, \qquad (7.27)$$

gdzie

$$x(n) = 1(n)$$

Wyznaczamy transformatę Z obu stron równania (7.27)

$$Y(z) - 2\left[z^{-1}Y(z) + y(-1)\right] = 3 \cdot Z(1(n)) \qquad (7.28)$$

Uwzględniając

$$Z(1(n)) = \frac{z}{z-1}$$

w równaniu (7.28) otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{3z}{\left(1-2z^{-1}\right)(z-1)} = \frac{3z^2}{(z-1)(z-2)}$$

Obliczamy odwrotną transformatę Z funkcji $Y(z)$

$$\frac{Y(z)}{z} = -3\frac{1}{z-1} + 6\frac{1}{z-2}$$

$$Y(z) = -3\frac{z}{z-1} + 6\frac{z}{z-2}$$

Korzystając z (7.6) i (7.7) znajdujemy

$$y(n) = Z^{-1}(Y(z)) = -3 + 6 \cdot 2^n$$

Poddając obie strony równania (7.27) transformacji Z otrzymujemy

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) = 3X(z)$$

Stąd

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3}{1-2z^{-1}} = \frac{3z}{z-2} \qquad (7.29)$$

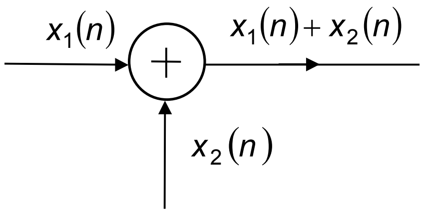
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Prezentacja multimedialna współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Reprezentacja systemów dyskretnych za pomocą schematów blokowych

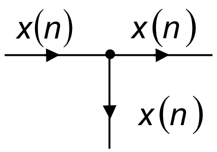
Elementy schematów blokowych

Blok

Węzeł sumacyjny



Węzeł rozgałęźny



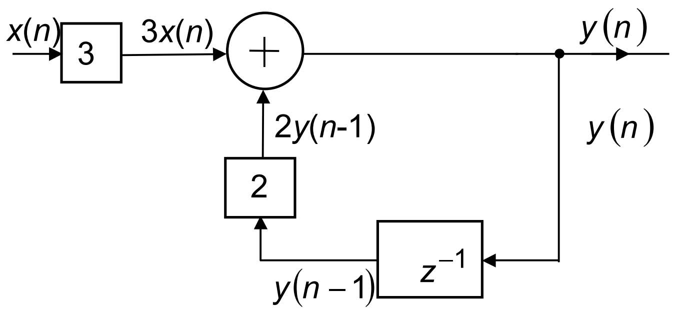
Przykład 7.8

Utworzyc schemat blokowy systemu opisanego równaniem różnicowym (7.27)

Równanie (7.27) przepisujemy w postaci

$$y(n) = 3x(n) + 2y(n-1)$$

Schemat blokowy



Rys. 7.3

7.6. Rozwiązywanie równań różnicowych

Przykład 7.9

Dane jest równanie różnicowe

$$y(n) - y(n-1) - 2y(n-2) = 1(n) - 0.1 \cdot 1(n-1)$$

z warunkami początkowymi

$$y(-1) = -1, \quad y(-2) = 0.5$$

$$\begin{aligned} &Y(z) - \left(y(-1) + z^{-1}Y(z)\right) - \\ &-2\left(y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)\right) = \\ &= X(z) - 0.1\left(x(-1) + z^{-1}X(z)\right) \end{aligned} \tag{7.30}$$

gdzie

$$x(n) = 1(n) \quad X(z) = \frac{z}{z-1} \quad x(-1) = 1(-1) = 0$$

Stąd wynika

$$\left(1 - z^{-1} - 2z^{-2}\right)Y(z) - y(-1) - 2y(-2) - 2y(-1)z^{-1} = $$
$$= \left(1 - 0.1z^{-1}\right)\frac{z}{z-1} = \frac{z-0.1}{z-1}. \tag{7.31}$$

Podstawiamy warunki początkowe I rozwiązujemy równanie (7.31) względem $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{-1 + 1 - 2z^{-1} + \dfrac{z-0.1}{z-1}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}} = $$
$$= \frac{-2.1 + 2z^{-1} + z}{(z-1)\left(1 - z^{-1} - 2z^{-2}\right)} = $$
$$= \frac{z\left(z^2 - 2.1z + 2\right)}{(z-1)(z+1)(z-2)}$$

Obliczamy odwrotną transformatę Z funkcji $Y(z)$ rozkładając funkcję $Y(z)/z$ na ułamki proste

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2 - 2.1z + 2}{(z+1)(z-1)(z-2)} = \frac{K_1}{z+1} + \frac{K_2}{z-1} + \frac{K_3}{z-2}$$

Wyznaczamy współczynniki $K_1,\ K_2,\ K_3$

$$K_1 = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{Y(z)}{z} = \lim_{z\to -1}\frac{z^2 - 2.1z + 2}{(z-1)(z-2)} = 0.85$$

$$K_2 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Y(z)}{z} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2 - 2.1z + 2}{(z+1)(z-2)} = -0.45$$

$$K_3 = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{Y(z)}{z} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2 - 2.1z + 2}{(z+1)(z-1)} = 0.6$$

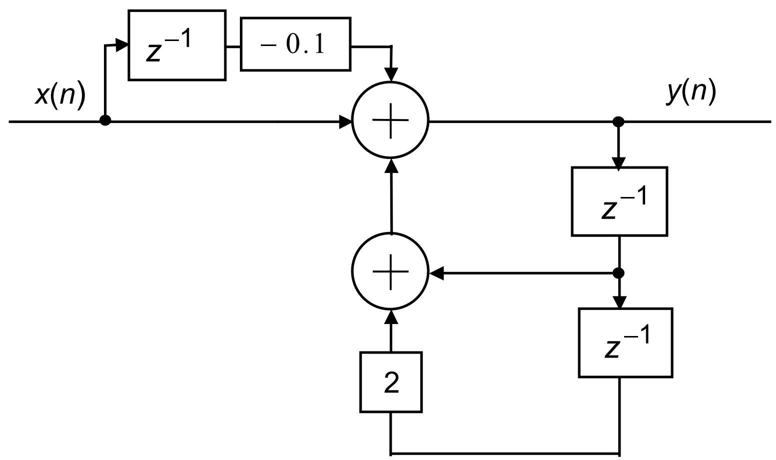
Otrzymujemy

$$Y(z) = 0.85\frac{z}{z+1} - 0.45\frac{z}{z-1} + 0.6\frac{z}{z-2} \qquad (7.32)$$

Korzystając ze wzorów (7.6) i (7.7) otrzymujemy

$$y(n) = \\ = 0.85(-1)^n - 0.45\cdot 1(n) + 0.6\cdot 2^n \qquad n = 0, 1, \ldots \qquad (7.33)$$

Schemat blokowy systemu opisanego równaniem (7.33)



Rys. 7.4

7.7. Porównanie transformacji Z oraz transformacji Fouriera (DTFT)

Transformata Fouriera sygnału dyskretnego $x(m)$ wynosi

$$X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\tilde{\omega}m} \tag{7.34}$$

Jeżeli $x(m) = 0$ dla $m < 0$, to wzór (7.34) przyjmuje postać

$$X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) e^{-j\tilde{\omega}m} \tag{7.35}$$

Transformata *Z* tego samego sygnału $x(m)$ wynosi

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} \tag{7.36}$$

Porównując (7.35) i (7.36) otrzymujemy

$$X\left(e^{j\tilde{\omega}}\right) = X(z)\Big|_{z = e^{j\tilde{\omega}}} \tag{7.37}$$