

42. Prąd stały. Prawa, twierdzenia, metody obliczeniowe

Celem ćwiczenia jest doświadczalne sprawdzenie praw obowiązujących w obwodach prądu stałego, oraz doświadczalne sprawdzenie zasadności stosowania niektórych twierdzeń i metod obliczeniowych.

42.1. Wiadomości ogólne

42.2. Przebieg ćwiczenia

- 42.42. Prawo Ohma
- 42.2.2. Charakterystyki źródeł napięciowego i prądowego
- 42.2.3. Prawa Kirchhoffa
- 42.42. Metoda przekształcania obwodu
- 42.2.5. Metoda superpozycji
- 42.2.6. Twierdzenie Thevenina i Nortona

42.3. Uwagi i wnioski

42.1. Wiadomości ogólne

Podstawowym zagadnieniem w elektrotechnice jest analizowanie obwodów elektrycznych polegające na obliczaniu prądów i napięć, aby na ich podstawie zbadać działanie i zachowanie się różnych urządzeń elektrycznych.

Obwody elektryczne powstają w wyniku połączenia różnych elementów (np. źródeł energii, oporników), które stanowią niepodzielną część pod względem funkcjonalnym. Każdy element ma zaciski, do których dołączane są przewody.

Element nazywamy liniowym, gdy opisany jest równaniem liniowym. Obwody, których elementy są liniowe nazywamy obwodami liniowymi.

W elementach tworzących obwody elektryczne zachodzą procesy energetyczne, takie jak:

- wytwarzanie energii elektrycznej kosztem innej postaci energii (chemicznej np. ogniwa, akumulatory; mechanicznej - generatory; świetlnej- ogniwa fotoelektryczne) - są to elementy aktywne zwane źródłami energii,
- rozpraszanie energii - są to elementy pasywne takie jak oporniki, w których energia elektryczna jest przekształcana na energię cieplną i rozpraszana,
- akumulacja energii - są to elementy pasywne, w których energia jest magazynowana w polu elektrycznym (np. kondensatory) lub magnetycznym i może być w całości zwrócona.

Obwody prądu stałego są zasilane przez źródła napięcia i prądu o stałych w czasie napięciach źródłowych i prądach źródłowych. Podstawowymi elementami pasywnymi obwodów prądu stałego są oporniki. Prądy i napięcia stałe oznaczamy wielkimi literami.

Opornik

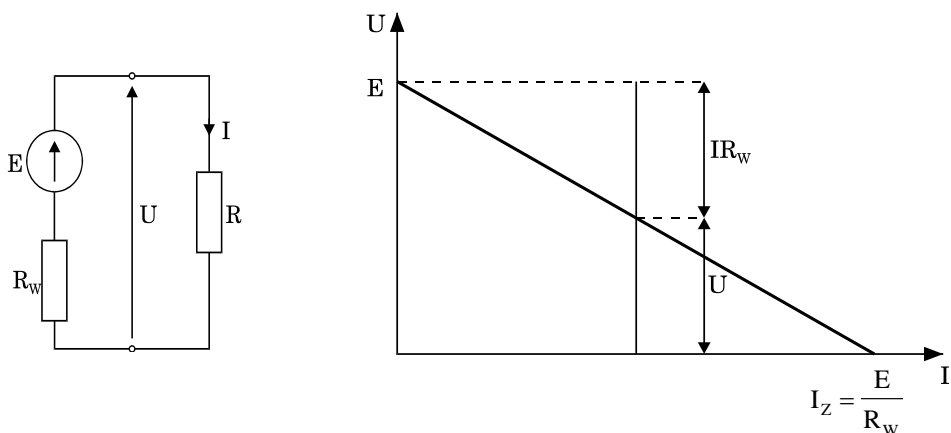
Opornik idealny, zwany również rezystorem, jest elementem, w którym zachodzi jedynie proces rozpraszania energii (nie zachodzą procesy wytwarzania ani akumulacji energii). Parametrem charakteryzującym opornik idealny jest rezystancja R . Rezystancja opornika liniowego jest stała. Rezystancja jednorodnego przewodnika o stałym przekroju jest wprost proporcjonalna do długości przewodnika l , odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju S i zależy od przewodności właściwej materiału γ , która charakteryzuje materiały pod względem przewodnictwa elektrycznego.

$$R = \frac{l}{\gamma S} \quad (42.1)$$

Źródła energii

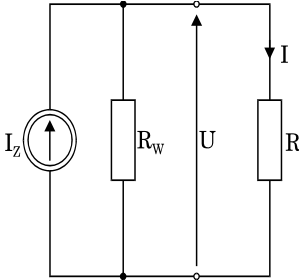
– Źródło napięcia

Źródło energii o postaci szeregowego połączenia idealnego źródła napięcia i rezystancji zwanej rezystancją wewnętrzną nazywany rzeczywistym źródłem napięciowym. Idealnym źródłem napięcia nazywamy źródło energii mające rezystancję wewnętrzną równą zero. Różnica potencjałów biegunów idealnego źródła nazywana jest napięciem źródłowym E .



Rys. 42.1. Źródło napięcia - schemat i charakterystyka

$$U = E - IR_w \quad (42.2)$$

– **Źródło prądu**

Źródło energii o postaci równoległego połączenia idealnego źródła prądu i rezystancji nazywamy rzeczywistym źródłem prądu. Idealnym źródłem prądu nazywamy element obwodu elektrycznego dostarczający prąd o stałym natężeniu i bardzo dużej rezystancji wewnętrznej. Rezystancja wewnętrzna idealnego źródła prądu jest nieskończenie duża.

Rys. 42.2. Źródło prądu - schemat

$$I = I_z \frac{R_w}{R + R_w} \quad (42.3)$$

Podstawowe prawa– **Prawo Ohma**

Wartości napięcia i natężenia prądu płynącego przez opornik idealny są do siebie proporcjonalne.

$$U = R I \quad (42.4)$$

Wielkość R jest rezystancją elektryczną.

– **I prawo Kirchhoffa**

Algebraiczna suma prądów w węźle równa jest zeru.

$$\sum_k I_k = 0 \quad (42.5)$$

– **II prawo Kirchhoffa**

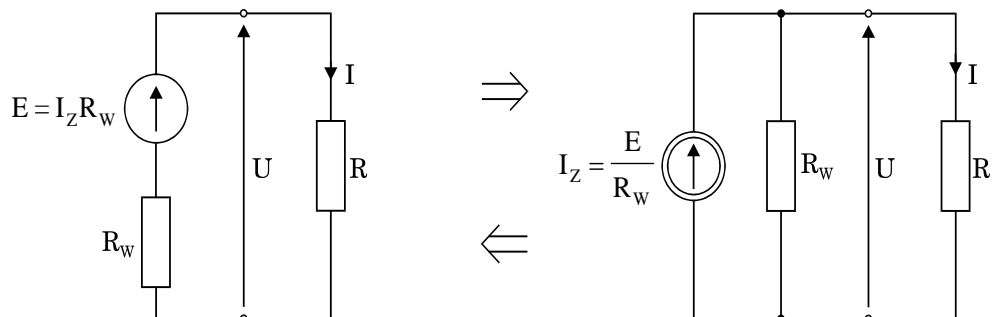
Algebraiczna suma wszystkich napięć wzdłuż dowolnej drogi zamkniętej w obwodzie elektrycznym równa jest zeru.

$$\sum_k U_k = 0 \quad (42.6)$$

Układy równoważne

Dwa układy o jednakowej liczbie zacisków nazywamy równoważnymi, gdy przy jednakowych napięciach między odpowiadającymi sobie zaciskami, płyną takie same prądy w przewodach dołączonych do tych zacisków. Obliczanie obwodów elektrycznych można uprościć zastępując pewne połączenia przez układy równoważne (zamianę źródeł energii, łączenie rezystorów).

– Zamiana źródeł energii



Rys. 42.3. Zamiana źródeł energii

Każde rzeczywiste źródło napięcia o napięciu źródłowym E i rezystancji wewnętrznej R_w można zastąpić rzeczywistym źródłem prądu o prądzie źródłowym $I_z = \frac{E}{R_w}$ i rezystancji wewnętrznej R_w .

źródłowym $I_z = \frac{E}{R_w}$ i rezystancji wewnętrznej R_w .

Każde rzeczywiste źródło prądu o prądzie źródłowym I_Z i rezystancji wewnętrznej R_W można zastąpić rzeczywistym źródłem napięcia o napięciu źródłowym $E = I_Z R_W$ i rezystancji wewnętrznej R_W .

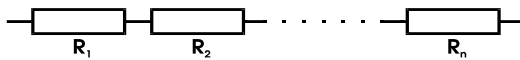
– **Łączenie rezystorów**

a) Szeregowe

Przy połączeniu szeregowym rezystorów, przez każdy rezystor płynie ten sam prąd, natomiast napięcie na połączeniu szeregowym równa się sumie napięć na poszczególnych rezystorach, które są różne i zgodnie z prawem Ohma zależą od wartości rezystancji poszczególnych rezystorów.

Rezystancja zastępcza połączenia szeregowego rezystorów wyraża się wzorem:

$$R_Z = \sum_{k=1}^n R_k \quad (42.7)$$



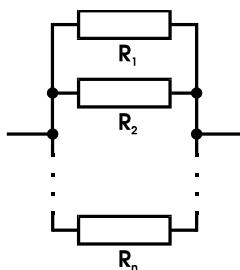
Rys. 42.4. Zastąpienie rezystancji połączonych szeregowo rezystancją zastępczą

b) Równoległe

Przy połączeniu równoległym rezystorów, na każdym z rezystorów jest takie samo napięcie, natomiast prąd dopływający do połączenia jest sumą prądów płynących przez poszczególne rezystory, które są różne i zgodnie z prawem Ohma zależą od wartości rezystancji poszczególnych rezystorów.

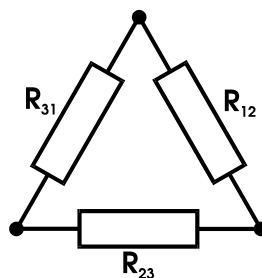
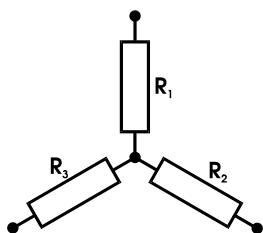
Rezystancja zastępcza połączenia równoległego rezystorów wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{R_Z} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (42.8)$$



Rys. 42.4. Zastąpienie rezystancji połączonych równolegle rezystancją zastępczą

Zamiana gwiazdy na trójkąt i trójkąta na gwiazdę



Rys. 42.5. Zamiana gwiazdy na trójkąt i trójkąta na gwiazdę

Wzory na wartości rezystancji połączeń równoważnych przy zamianie gwiazdy na trójkąt:

$$\text{Y} \rightarrow \Delta \quad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \text{ itd...} \quad (42.9)$$

i trójkąta na gwiazdę:

$$\Delta \rightarrow \text{Y} \quad R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \text{ itd...} \quad (42.10)$$

Metody obliczeniowe– **Metoda praw Kirchhoffa**

Obliczenie prądów i napięć w obwodzie można wykonać za pomocą praw Kirchhoffa.

Liczba niewiadomych (prądów lub napięć) n musi być równa liczbie równań n . Jeżeli obwód posiada n gałęzi i α węzłów to można ułożyć:

$$\alpha - 1 \quad \text{równań z I prawa Kirchhoffa} \quad \sum_k I_k = 0 \quad (42.11)$$

$$\text{i pozostałe, } n - \alpha + 1 \quad \text{równań z II prawa Kirchhoffa} \quad \sum_k U_k = 0 \quad (42.12).$$

– **Metoda prądów oczkowych**

Metoda prądów oczkowych pozwala dla obwodu o n gałęziach ułożyć $n - \alpha + 1$ równań.

Równanie macierzowe wynikające z metody prądów oczkowych:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E} \quad (42.13)$$

- gdzie: \mathbf{R} - macierz rezystancji oczkowych,
- R_{ii} - rezystancja własna oczka - suma rezystancji w oczku,
- R_{ij} - rezystancja wzajemna oczek, rezystancja ma znak + jeżeli prądy oczkowe we wspólnej gałęzi mają zgodne zwroty, a – gdy przeciwne,
- \mathbf{E} - wektor napięć oczkowych,
- E_i - suma napięć źródłowych w oczku (składniki sumy mają znak dodatni, gdy zwrot napięcia źródłowego jest zgodny ze zwrotem prądu oczkowego).

– **Metoda potencjałów węzłowych**

Metoda potencjałów węzłowych pozwala dla obwodu o n gałęziach ułożyć

$\alpha - I$ równań.

Równanie macierzowe wynikające z metody potencjałów węzłowych:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}_w \quad (42.14)$$

gdzie: \mathbf{G} - macierz konduktancji węzłowych,

G_{ii} - konduktancja własna węzła - suma konduktancji gałęzi zbiegających się w węzle,

G_{ij} - konduktancja wzajemna - suma ze znakiem $-$, konduktancji gałęzi łączących węzły i i j ,

\mathbf{I}_w - wektor prądów węzłowych,

I_i - algebraiczna suma iloczynów $\sum_i GE$ gałęzi zbiegających się w węzłach (składniki sumy mają znak dodatni, gdy zwrot napięcia źródłowego jest skierowany do węzła).

– *Metoda superpozycji*

Prąd w dowolnej gałęzi obwodu liniowego, przy działaniu wszystkich źródeł energii, jest sumą algebraiczną wszystkich prądów, które płyną na skutek działania każdego źródła energii z osobna.

Usunięcie źródła z obwodu polega na zwarciu źródeł napięciowych i rozwarciu źródeł prądowych.

Twierdzenia

– *Twierdzenie Thevenina*

Każdy liniowy dwójnik aktywny można przedstawić w postaci rzeczywistego źródła napięcia.

Napięcie źródłowe zastępczego źródła równe jest napięciu na zaciskach dwójnika w stanie jałowym, a rezystancja wewnętrzna źródła zastępczego jest rezystancją widzianą z zacisków dwójnika po usunięciu źródeł napięcia (zwarcie) i źródeł prądu (rozwarcie gałęzi).

– *Twierdzenie Nortona*

Każdy liniowy dwójnik aktywny można przedstawić w postaci rzeczywistego źródła prądu.

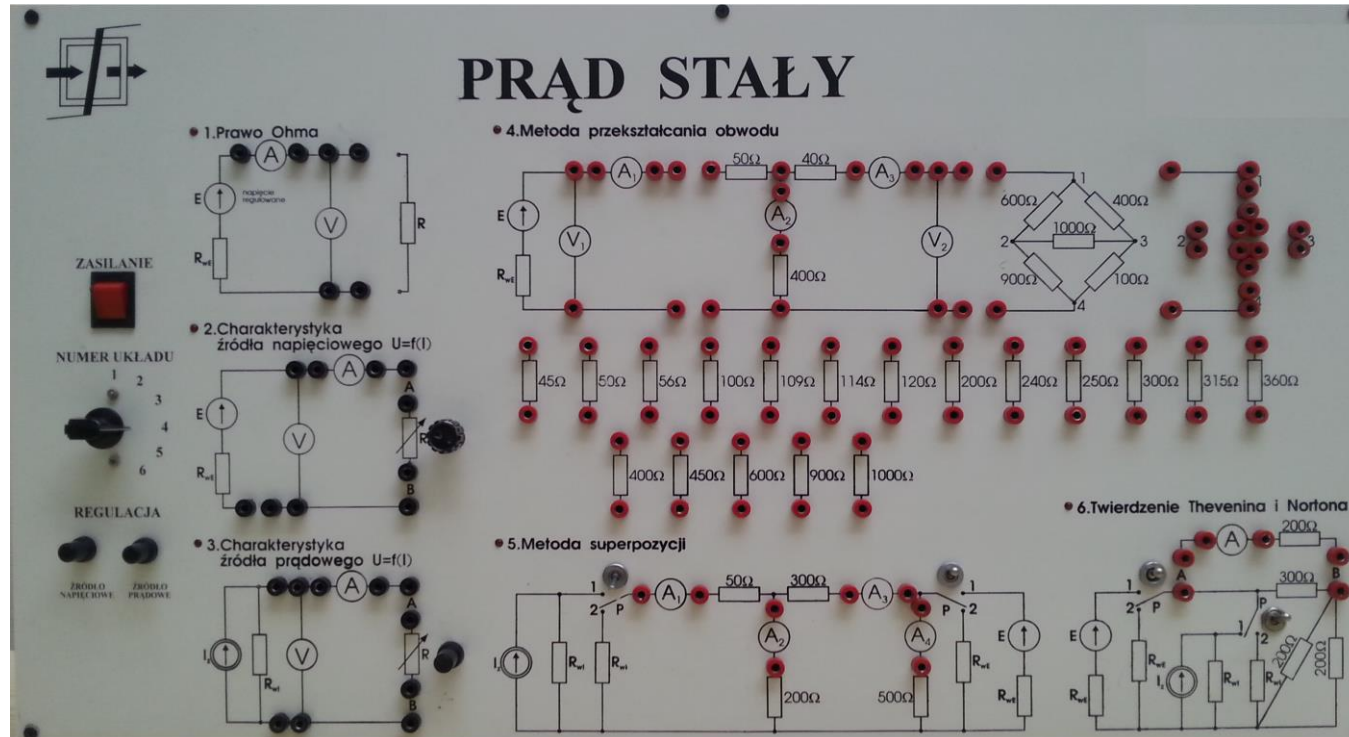
Prąd źródłowy zastępczego źródła prądowego jest równy prądowi płynącemu przez zwarte zaciski dwójnika, a rezystancja wewnętrzna źródła zastępczego jest rezystancją widzianą z zacisków dwójnika po usunięciu źródeł napięcia (zwarcie) i źródeł prądu (rozwarcie gałęzi).

42.2. Przebieg ćwiczenia**42.42. Prawo Ohma**

Połączyć układ **1**. na płycie ćwiczenia (rys. 42.6). W tym celu należy włączyć amperomierz i woltomierz do układu oraz dowolnie wybrany rezystor z zestawu rezystorów znajdujących się na płycie ćwiczenia. Załączyć napięcie do układu **1**, a następnie regulując potencjometrem źródła napięciowego wykonać pomiary i wykreślić charakterystykę $U=f(I)$ dla wybranego rezystora. Wyniki pomiarów zanotować w tabeli 42.1.

Tabela 42.1.

Lp.	U	I	R
	V	mA	Ω
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			



Rys. 42.6. Płyta ćwiczenia

42.2.2. Charakterystyki źródeł napięciowego i prądowego

Połączyć układ **2** na płycie ćwiczenia (rys. 42.6) (wg rysunku 42.2), pozostawiając rozwarte zaciski AB. Załączyć napięcie do układu **2**. Regulując potencjometrem źródła napięciowego ustawić napięcie źródłowe $E=5V$ lub $E=2V$. Zapisać pierwszy punkt w tabeli 2 przy prądzie I równym zero. Ustawić regulowany rezystor R na wartość maksymalną (prawe skrajne położenie), załączyć rezystor na zaciski AB źródła napięciowego. Wykonać serię pomiarów zmniejszając wartość rezystancji od wartości maksymalnej do zera. Wyniki pomiarów zanotować w tabeli 42.2.

Tabela 42.2.

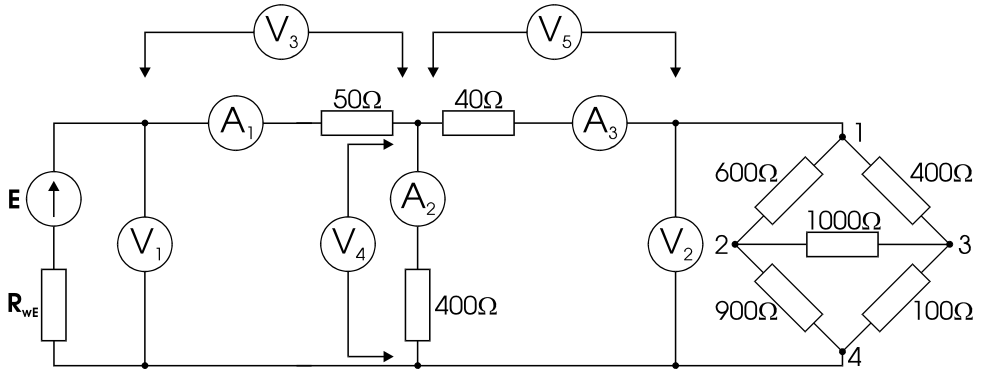
Lp.	U	I
	V	mA
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

Połączyć układ **3** na płycie ćwiczenia (rys. 42.6) (wg rysunku 42.2) zwiększając zaciski AB. Załączyć źródło do układu **3**. Regulując potencjometrem źródła prądowego ustawić prąd źródłowy $I_Z=10\text{mA}$ lub $I_Z=4\text{mA}$. Ustawić regulowany rezystor R na wartość zerową (lewe skrajne położenie). Załączyć rezystor na zaciski AB źródła prądowego. Wykonać serię pomiarów zwiększając wartość rezystancji R, tak aby napięcie na źródle nie przekroczyło 5V. Wyniki pomiarów zanotować w tabeli 2.2.3.

Tabela 42.3.

Lp.	U	I
	V	mA
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

42.2.3. Prawa Kirchhoffa



Rys. 42.7. Podstawowy układ pomiarowy

Połączyć układ 4 na płycie ćwiczenia (rys. 42.6) (wg rysunku 42.7), włączyć mierniki, w miejsca przerwanego obwodu założyć zwory, pozostawiając rozwarte zaciski źródła. Załączyć napięcie do układu 4 i regulując potencjometrem źródła napięciowego ustawić napięcie $E=5V$. Założyć zwory łączące źródło z resztą obwodu. Sprawdzić czy suma prądów w węzle równa się zero. Wyniki zanotować w tabeli 42.4.

Tabela 42.4.

I_1	I_2	I_3	ΣI
mA	mA	mA	mA

Sprawdzić czy suma napięć w zamkniętych obwodach równa się zero, włączając dodatkowy woltmierz (jak pokazano na rysunku 42.6) na gałęzie z rezystancjami 50Ω , 40Ω i 400Ω . Wyniki zanotować w tabeli 2.2.5.

Tabela 42.5.

					oczeko 1	oczeko 2
U_1	U_3	U_4	U_5	U_2	ΣU	ΣU
V	V	V	V	V	V	V

42.42. Metoda przekształcania obwodu

Ta część ćwiczenia polega na kolejnym zastępowaniu układu rezystorów prostszym układem równoważnym i wykonywaniu pomiarów po każdej zmianie w układzie. Wyniki pomiarów należy zanotować w tabeli 42.6.

- Wykonać pomiary w układzie podstawowym (Rys. 42.6.).
- Przekształcić część obwodu **1-4** na obwód równoważny (rys. 42.6)
 - zamiana $\Delta \rightarrow \text{Y}$

Wykonać obliczenia i zgodnie z obliczeniami zmontować nowy obwód (wykorzystując specjalne zaciski na płycie i zestaw rezystorów). Odłączyć podstawowy układ **1-4** i na to miejsce podłączyć zmontowany przez siebie obwód równoważny. Wykonać pomiary.
 - połączenie szeregowo-równoległe

Obliczyć rezystancję zastępczą połączenia szeregowo-równoległego i zgodnie z obliczeniem zmontować i podłączyć nowy obwód. Wykonać pomiary.
 - połączenie szeregowe

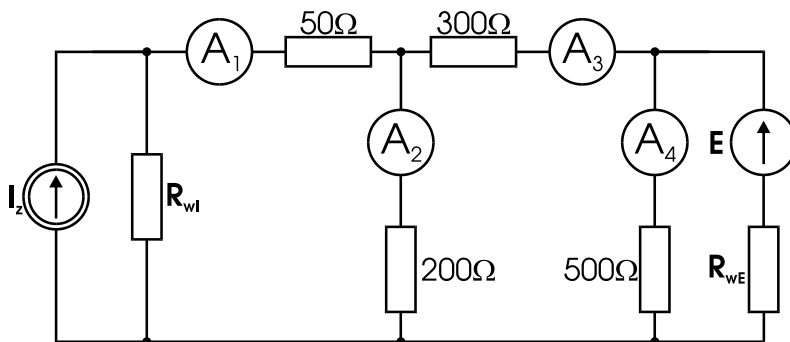
Zastąpić obwód **1-4** obliczoną rezystancją zastępczą. Wykonać pomiary.
- Obliczyć rezystancję zastępczą całego obwodu

Zastąpić cały obwód załączony na zaciski źródła poprzez obliczony przez siebie rezystor (połączenia równoległe i szeregowe). Wartość prądu I_1 i napięcia na źródle U_1 zapisać w tabeli 42.6.

Tabela 42.6.

	U_1	I_1	I_2	I_3	U_2
	V	mA	mA	mA	V
Obwód podstawowy					
1 obwód równoważny					
2 obwód równoważny					
3 obwód równoważny					

42.2.5. Metoda superpozycji



Rys. 42.8. Układ pomiarowy z dwoma źródłami energii do sprawdzenia poprawności stosowania metody superpozycji

- Należy ustawić wartości napięcia źródłowego $E=5V$ i prądu źródłowego $I_Z=10mA$. Jeżeli położenia potencjometrów źródła napięciowego i prądowego były zmieniane należy:
 - włączyć woltomierz do układu **2** (rys. 42.6) (wg rysunku 42.1) na płycie ćwiczenia, przy rozwartych zaciskach AB i regulując potencjometrem źródła napięciowego ustawić napięcie źródłowe $E=5V$,
 - włączyć amperomierz do układu **3** (rys. 42.6) na płycie ćwiczenia (wg rysunku 42.2), przy zwartych zaciskach AB i regulując potencjometrem źródła prądowego ustawić prąd źródłowy $I_Z=10mA$,

następnie

- włączyć mierniki do układu **5** na płycie ćwiczenia (rys. 42.6),
- ustawić przełączniki p w pozycji **1**,
- załączyć źródła do układu **5**.

Wykonać pomiary, a wyniki zanotować w tabeli 42.7.

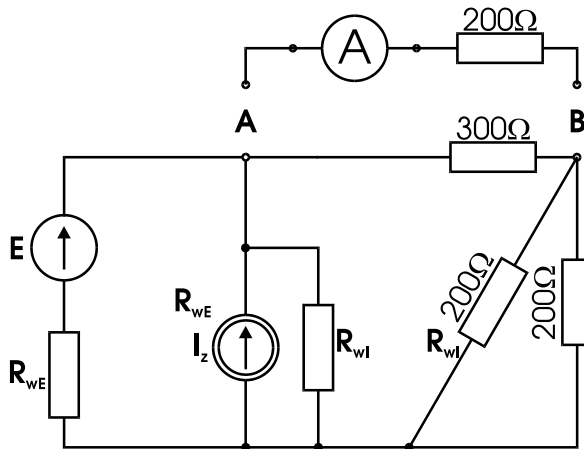
Tabela 42.7.

Działają źródła:	I_1	I_2	I_3	I_4
	mA	mA	mA	mA
obydwa jedno- cześnie				
tylko napię- ciowe				
tylko prądowe				
ΣI				

- Rozewrzeć źródło prądowe pozostawiając jego rezystancję wewnętrzną (rys. 42.6 - przełącznik p przy źródle prądowym ustawić w pozycji **2**). Wykonać pomiary, wyniki zanotować w tabeli 42.7.

- Załączyć do układu źródło prądowe (rys. 42.6 przełącznik p przy źródle prądowym ustawić w pozycji 1)
- Zewrzeć źródło napięciowe pozostawiając jego rezystancję wewnętrzną (rys. 42.6 przełącznik przy źródle napięciowym w pozycji 2). Wykonać pomiary, wyniki zanotować w tabeli 42.7.

42.2.6. Twierdzenie Thevenina i Nortona



Rys. 42.9. Układ pomiarowy z dwoma źródłami energii do sprawdzenia poprawności stosowania twierdzeń Thevenina i Nortona

- Należy ustawić wartości napięcia źródłowego $E=2V$ i prądu źródłowego $I_Z=4mA$. W tym celu należy postąpić tak jak opisano w pkt. 2.5.
- Przełączniki ustawić w pozycji 1 rys. 42.6.
- Do zacisków AB włączyć gałąź z rezystancją $200\ \Omega$ i amperomierzem.
- Załączyć źródła do układu i pomierzyć prąd I . Wynik pomiaru zamieścić w tabeli 42.9.
- Odłączyć gałąź AB.
- Pomierzyć woltomierzem napięcie na zaciskach AB w stanie jałowym U_{AB} .
- Zewrzeć zaciski AB za pomocą amperomierza i pomierzyć prąd zwarcia I_{ZAB} .
- Wyłączyć źródła z układu 6 na płycie ćwiczenia (rys. 42.6) (wg rysunku 42.9).

- Pomierzyć rezystancję układu R_{AB} widzianą z zacisków AB.
- Wyniki pomiarów zanotować w tabeli 42.8.

Tabela 42.8.

	U_{AB}	I_{ZAB}	R_{AB}
	V	mA	Ω
POMIAR			
OBLICZENIA			

- Do układu **2** na płycie ćwiczenia (rys. 42.6) szeregowo z R_{WE} włączyć taki rezystor, aby utworzone źródło napięciowe miało rezystancję równą rezystancji R_{AB} pomierzonej w układzie **6** na płycie ćwiczenia (rys. 42.6) (wg rysunku 42.9). Włączyć woltomierz, zaciski AB pozostawić rozwarte. Załączyć źródło do układu **2** (rys. 42.6). Za pomocą potencjometru ustawić napięcie źródłowe równe napięciu U_{AB} .
- Gałąź AB z amperomierzem i rezystorem 200Ω (z układu **6** - rys. 42.6) włączyć na zaciski AB rzeczywistego źródła napięciowego o rezystancji wewnętrznej R_{AB} i napięciu źródłowym U_{AB} .
- Pomierzyć prąd płynący przez dołączoną gałąź. Wynik zanotować w tabeli 2.19.
- Do układu **3** na płycie ćwiczenia dołączyć równolegle taką rezystancję, aby utworzone źródło prądowe miało rezystancję równą rezystancji R_{AB} pomierzonej w układzie **6**. Włączyć amperomierz i zewrzeć zaciski AB. Załączyć źródło do układu **3**. Za pomocą potencjometru ustawić prąd źródła równy prądowi I_{ZAB} .
- Dołączyć gałąź AB z układu **6** na płycie ćwiczenia do zacisków AB rzeczywistego źródła prądowego o rezystancji wewnętrznej R_{AB} i prądzie źród-

dłowym równym $I_{Z_{AB}}$. Pomierzyć prąd płynący przez dołączoną gałąź. Wynik pomiaru zamieścić w tabeli 42.9.

Tabela 42.9.

Pomiar prądu w układzie 6	Twierdzenie Thevenina		Twierdzenie Nortona	
	Obliczenia	Pomiar	Obliczenia	Pomiar
mA	mA	mA	mA	mA

W sprawozdaniu należy:

- wykreślić na papierze milimetrowym charakterystykę zbadanego rezystora $U=f(I)$,
- obliczyć dla kilku dowolnych punktów wartość rezystancji i porównać z wartością podaną na płycie,
- wykreślić charakterystykę źródła napięciowego $U=f(I)$,
- wyznaczyć graficznie wartość prądu zwarciovego źródła napięciowego,
- obliczyć na podstawie charakterystyki źródła napięciowego jego rezystancję wewnętrzną R_{WE} ,
- wykreślić charakterystykę źródła prądowego $U=f(I)$,
- przedłużając otrzymaną prostą do osi U wyznaczyć graficznie wartość napięcia na rozwartym źródle prądowym $I_Z R_{WI}$
- obliczyć na podstawie charakterystyki źródła prądowego jego rezystancję wewnętrzną R_{WI}
- przedstawić sprawdzenie praw Kirchhoffa,
- porównać wyniki otrzymane podczas kolejnych faz przekształcania obwodu,
- porównać, wynikającą z metody superpozycji, sumę algebraiczną prądów w gałęziach przy działaniu każdego źródła osobno, z prądami jakie płyną w gałęziach, gdy działają oba źródła jednocześnie,

- korzystając z pomierzonych wartości U_{AB} , I_{ZAB} i R_{AB} - przedstawić dwójnik aktywny AB w postaci rzeczywistego źródła napięciowego (tw. Thevenina) i rzeczywistego źródła prądowego (tw. Nortona) i obliczyć prąd w gałęzi z rezystorem 200Ω (uwaga: należy uwzględnić rezystancję amperomierza),
- porównać prąd obliczony na podstawie obydwu twierdzeń z wynikami pomiarów,
- obliczyć wartości U_{AB} , I_{ZAB} i R_{AB} na podstawie danych schematu układu 6 i porównać z wartościami pomierzonymi.

42.3. Uwagi i wnioski

Oceń poprawność stosowania praw, twierdzeń i metod obliczeniowych w obwodach prądu stałego.

Literatura

- [1]. Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. tom I Obwody liniowe i nieliniowe, WNT, Warszawa-Poznań 1995
- [2]. Kurdziel R.: Podstawy Elektrotechniki, WNT, Warszawa 1972